座標の微分によるＦＥＭの精度の一検討法

熊本大学　学生員　中島　謙
熊本大学　学生員　本田 晴政
八代高専　正　員　内山 義博
熊本大学　正　員　平井 一男

1．まえがき：

有限要素法は近似解法であり要素分割を多くするほど精度は上がるはずである．しかし無限に分割するならともかく限られた時間，計算機容量を使って解くとき分割数を増やしていくだけではよりよい厳密解は得られない．そこで本報ではズーム法を用いて，応力の座標による各要素の微分値を求め，それを用いて二次元弾性体の釣合方程式により要素分割の粗さを検討する．

2．理論

（A）座標による応力の微分

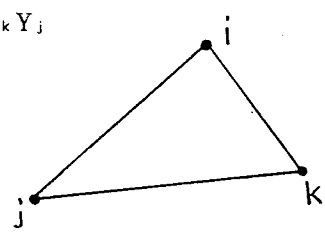
応力ベクトルと変位ベクトルの関係は次式で表せる．

$$\sigma = DBU \qquad (1)$$

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\quad B=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}Y_{jk} & 0 & Y_{ki} & 0 & Y_{ij} & 0\\ 0 & X_{kj} & 0 & X_{ik} & 0 & X_{ji}\\ X_{kj} & Y_{jk} & X_{ik} & Y_{ki} & X_{ji} & Y_{ij}\end{bmatrix}=1/\Delta\times\overline{B}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & X_i & Y_i\\ 1 & X_j & Y_j\\ 1 & X_k & Y_k\end{vmatrix}=X_jY_k+X_kY_i+X_iY_j-X_jY_i-X_iY_k-X_kY_j$$

E：ヤング率　ν：ポアソン比



図－1

ここで（1）をｘで微分すると次式になる．

$$\frac{\partial\sigma}{\partial X}=D\frac{\partial B}{\partial X}U+DB\frac{\partial U}{\partial X} \qquad (2)$$

また

$$\frac{\partial B}{\partial X}=-\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial X}\overline{B}+\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\overline{B}}{\partial X}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\overline{B}}{\partial X}-\frac{\partial\Delta}{\partial X}B \qquad (3)$$

ここで$\overline{B}$を各節点（ｉ，ｊ，ｋ）で微分すると次式になる．

$$\frac{\partial\overline{B}_i}{\partial X}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right]\quad\frac{\partial\overline{B}_j}{\partial X}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1\\-1&0&0&0&1&0\end{array}\right]\quad\frac{\partial\overline{B}_k}{\partial X}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\1&0&-1&0&0&0\end{array}\right] \qquad (4)$$

また$\partial\Delta_i/\partial X=Y_{jk}=Y_j-Y_k$，$\partial\Delta_j/\partial X=Y_{ki}=Y_k-Y_i$，$\partial\Delta_k/\partial X=Y_{ij}=Y_i-Y_j$　　（5）

これより各節点における微分値$\partial B/\partial X$を求める．

次に外力ベクトルＦと変位ベクトルの関係は剛性マトリックスを用いて表すと次式になる．

$$F=KU \qquad (6)$$

（6）式のｘによる微分は次式になる．

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{\partial K}{\partial X}U+K\frac{\partial U}{\partial X} \qquad (7)$$

ここで$\partial F/\partial X=0$となることより次式が導かれる．

$$\frac{\partial U}{\partial X}=-K^{-1}\frac{\partial K}{\partial X}U=-K^{-1}U^{*} \qquad \left(U^{*}=\frac{\partial K}{\partial X}U\right) \qquad (8)$$

ここで剛性マトリックス　$K=\Sigma\Delta/2\times B^{T}DB$よりｎ番目の三角形要素に対する微分は次式となる．

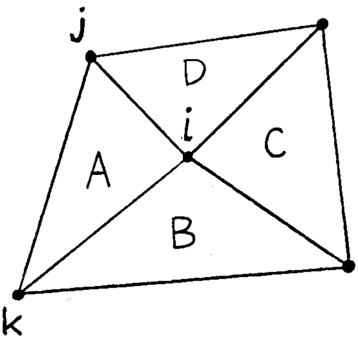
$$\frac{\partial K_n}{\partial X}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta_n}{\partial X}B_n^T D B_n+\frac{\Delta_n}{2}\frac{\partial B_n^T}{\partial X}D B_n+\frac{\Delta_n}{2}B_n^T D\frac{\partial B_n}{\partial X} \tag{9}$$

上記より応力の各節点（ｉ，ｊ，ｋ）における微分値$\partial\sigma/\partial X$が求まる．ｙ方向微分も同様に求められる．

（Ｂ）三角形要素の応力の微分値

ｉ節点における微分は（１０）になる

$$\frac{\partial\sigma}{\partial X_i}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial X_i}\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial X_i}\\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial X_i}\end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial Y_i}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial Y_i}\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial Y_i}\\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y_i}\end{bmatrix} \tag{10}$$



図－２

ｊ，ｋ節点においても同様である．しかし今，これは各節点における微分値 であるのでこれを各三角形要素内の点における微分としてみるため３節点を合計したものを微分値として用いる．すなわち

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_i}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_j}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_k} \tag{11}$$

同様にして$\partial\sigma_y/\partial X$，$\partial\tau_{xy}/\partial X$，$\partial\sigma_x/\partial Y$，$\partial\sigma_y/\partial Y$，$\partial\tau_{xy}/\partial Y$を求める．

この様にして,$\partial\sigma/\partial X$，$\partial\sigma/\partial Y$，を求める．

（Ｃ）平均化した応力の微分値

上記（Ｂ）の三角形要素の微分値は非常に局部的な部分の応力を対象とするので，図－２の様にｉ点に集まるいくつかの三角形要素の応力の微分値を求め，それらの和の平均として，ｉ点の応力の微分値と考えることも可能である．図－２をモデルにして考えてみると，この場合は次式で求められる．

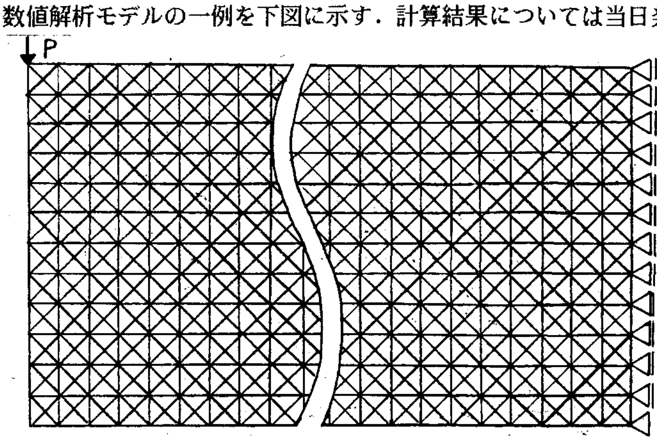
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}=\left(\frac{\partial\sigma(A)}{\partial X}+\frac{\partial\sigma(B)}{\partial X}+\frac{\partial\sigma(C)}{\partial X}+\frac{\partial\sigma(D)}{\partial X}\right)/4 \tag{12}$$

同様にしてｉ点における微分値，$\partial\sigma_y/\partial X$，$\partial\tau_{xy}/\partial X$,も求まる．ｙ方向微分も同様にして求める．

ここでいま求めてきた微分を用いて２次元弾性体の釣合方程式（１３）式より各要素内の応力が一定であるかを検討しながら数値解析を行う．

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y}+X=0 \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial X}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial Y}+Y=0 \tag{13}$$

数値解析モデルの一例を下図に示す．計算結果については当日発表する．



図－３

要素数（１００８）

節点数（５３８）