

面内曲げを受ける扇形板の座屈特性

長崎大学 工 学生員 〇平川倫明 長崎大学 工 正 員 高橋和雄
 長崎大学 工 正 員 小西保則 柳山鉄工所 正 員 夏秋義広

1. まえがき 曲線構造物の腹板などに使用されている扇形板が面内曲げを受ける場合の座屈問題は、曲線曲がりばりの腹板の局部座屈の立場から、Chu¹⁾、三上²⁾によって取り扱われているが、扇形板としての座屈特性の把握は十分でないようである。本研究は直線辺が単純支持され、円弧辺が任意の境界条件をもつ扇形板の直線辺に面内曲げが作用する場合の座屈解析を行うものである。すなわち、面内力を受ける平板の基礎微分方程式をガラキン法を用いて離散化して、各種の境界条件および形状パラメーターのもとに解析する。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示す外径 a 、内径 b 、開き角 α の扇形板を考える。この扇形板の直線辺に、曲げモーメント M が作用する。平板内の面内力 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ は平面応力問題として求められる。

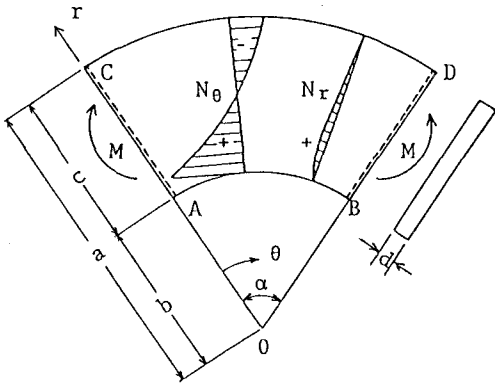


図-1 一般図および座標系

$$N_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^3} \ln \frac{a}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{b}{r} \right) \quad (1)$$

$$N_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^3} \ln \frac{a}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{b}{r} + a^2 - b^2 \right) \quad (2)$$

$$N_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $N = (a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 (\ln(a/b))^2$

図-1に示すように、扇形板の面内力の分布は直線とはならない。また、円周方向の面内力 N_θ の他に、半径方向の面内力 N_r も存在することに注意を要する。

これらの面内力を受ける扇形板の基礎微分方程式は次のように表される。

$$L(w) = D \nabla^4 w - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $D = Ed^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 ν : ポアソン比、 ρ : 板の密度、 d : 板厚、 E : ヤング率
 円弧辺の境界条件として、つぎの3ケースを考える。

case I : 円弧辺単純支持

case II : 固定

case III : 自由

3. 解法 式(4)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sn} W_{sn}(\xi, \theta) \quad (5)$$

ここに、 a_{sn} : 未定定数、 W_{sn} : 境界条件を満足する座標関数

上式の座標関数として、扇形板の自由振動の基準関数を用いるものとすれば、 W_{sn} は次のように表される³⁾。

$$W_{sn} = R_{sn}(\xi) \sin \alpha_n \theta \quad (6)$$

ここに、 $R_{sn} = A_{sn} J_{\alpha_n}(k_{pn} \xi) + B_{sn} Y_{\alpha_n}(k_{pn} \xi) + C_{sn} I_{\alpha_n}(k_{pn} \xi) + D_{sn} K_{\alpha_n}(k_{pn} \xi)$ 、

$k_{pn} = \sqrt{\rho d a^4 \omega_n^2 / D}$: s 次振動の固有値、 $J_{\alpha_n}, Y_{\alpha_n}, I_{\alpha_n}, K_{\alpha_n}$: α_n 次のBessel関数、 $A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}$: モード定数

式(5)を式(4)に代入して、Galerkin法を適用する。

$$\int_0^1 \int_0^\alpha L(w) W_{pn} \xi d\xi d\theta = 0 \quad (7)$$

ここに、 $p, n = 1, 2, \dots$ 、 $\beta = b/a$ (内外径比)、 $\xi = r/a$
 上式の積分を実行すれば、次式が得られる。

$$k_{pn}^4 I_{pn} a_{pn} - (M/D) \sum a_{pn} I_{spn} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $I_{pn} = \int_0^1 R_{pn}^2 \xi d\xi$

$$I_{spn} = \frac{4}{N} \int_0^1 \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \frac{dR_{pn}}{d\xi} + \frac{a_n^2}{\xi} f_2(\xi) R_{sn} R_{pn} \right\} d\xi$$

式(8)を行列表示すれば、次のようになる。

$$[I][X] = (M/D)[G][X] \quad (9)$$

ここに、 $[I]$: 単位行列、 $[G]$: 係数行列、 $X = \{a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \dots\}^T$

上式において、 $\lambda = M/D$ とすれば、行列の固有値問題となり、通常の方法を用いて固有値 λ とベクトル X が得られる。

4. 数値結果 式(9)に含まれるパラメーターは扇形板の開き角 α と内外径比 β の2個である。面内曲げを受ける座屈解析に必要なパラメーターとして、新た

に次式で定義される縦横比 μ を導入する。

$$\mu = \text{平均円弧長} / \text{載荷辺長} \quad (10)$$

図-1に併記してある面内曲げを受ける扇形板の円周方向の面内力 N_θ の分布は直線とはならない。また、半径方向の面内力 N_r も存在する。内外径比の減少とともに、内径側の N_θ の値が急激に増大し、逆に外径側の値が小さくなる。このような内外径比 β の変化による面内力の分布特性は、扇形板の座屈特性に影響を及ぼすことが予想される。

内外径比 $\beta=0.8, 0.6, 0.4$ の各ケースについて、縦横比の変化に伴う最低次の座屈モーメント $\lambda=M/D$ を各境界条件に対して求めれば、図-2~4のとおりである。図中の n は θ 方向の半波数を示す。各ケースとも正(case-a)、負(case-b)の曲げモーメントに対する座屈モーメントを併記してある。図-2に示してある $\beta=0.8$ 、すなわち、面内力の分布形状が長方形板に近い場合には、面内曲げを受ける長方形板と同一の座屈パターンとなる。扇形板の応力分布を反映して、case I, IIの場合には負のモーメントの値が小さくなる。この原因は、自由の場合正の曲げのもとでは、はりの横倒れ座屈のモードに似た剛体変形を起こすのに対して、負の曲げでは弾性変形を伴うためと思われる。

β の値が小さくなるにつれて、図-3, 4に示すように、扇形板としての力学的特性が現われてくる。すなわち、正、負の座屈モーメントの差が大きくなるとともに、case I, IIの負のモーメントの波数によって一定の極値を取る規則性が乱れてくる。この結果、 $n=1$ すなわち、半波数が1の場合が座屈曲線が最小値を取るようになる。

図-5は、長方形板と同じ座屈パターンをもつ場合について、座屈モーメントと内外径比 β との関係を示したものである。内外径比 β が大きくなると、長方形板の座屈モーメントに近づくことが予想される。

5. まとめ case IIIの場合についてアーチの横倒れ座屈との関係、座屈モードなどは講演時に発表する。

- 参考文献 1) Chu, Y. K.: Beuluntersuchung von eben Stegblechen kreisförmig gekrümmter Träger mit I-Querschnitt, Stahlbau, Heft 5, pp.129~142, 1966.2.
2) 三上・赤松・武田: 純曲げを受ける薄肉I断面曲がり桁の局部座屈と連成座屈, 土木学会論文報告集, 第230号, pp.45~54, 1974.3.
3) 山崎・樗木・金子: 扇形板の自由振動解析, 九州大学工学集報, 第42巻, 第4号, 1969.

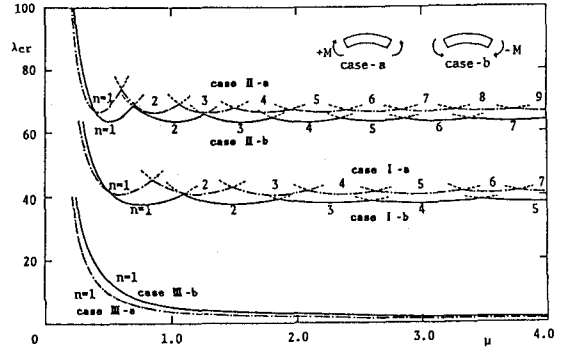


図-2 扇形板の座屈曲線 (内外径比 $\beta=0.8$)

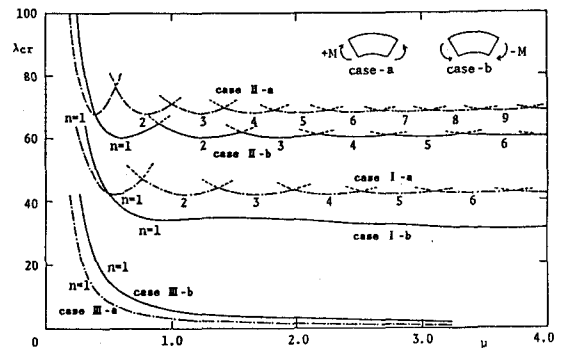


図-3 扇形板の座屈曲線 (内外径比 $\beta=0.6$)

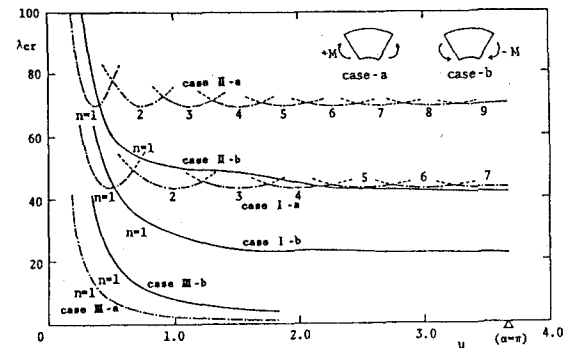


図-4 扇形板の座屈曲線 (内外径比 $\beta=0.4$)

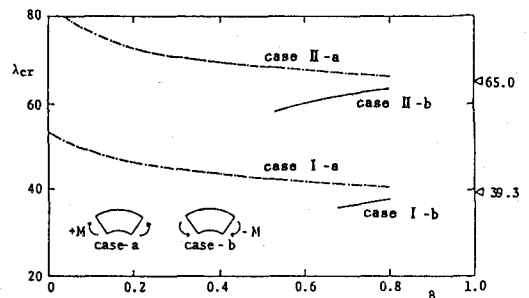


図-5 内外径比と最小座屈モーメントとの関係