

定係数1次元確率移流分散方程式の濃度予測に関する一考察

九州大学 工学部 ○学生員 西園 裕一
九州大学 工学部 正 員 河村 明
九州大学 工学部 正 員 神野 健二
九州大学 工学部 正 員 上田 年比古

1. はじめに

一般に自然現象は確率過程と考えられ、その挙動は確率微分方程式で表現される。しかし、従来、例えば移流分散現象を考える場合、確率変動項は無視され確定論的アプローチがなされ、しかも初期条件および境界条件は既知情報として取り扱われている。そこで本報では、定時間観測データを用いた、確率変動項を含んだ微分方程式の一つの解法として、フーリエ級数展開とカルマンフィルターを用いた解法を提案している。すなわち、まず確率微分方程式として簡単な定係数1次元移流分散方程式を取り上げ、これに確率変動項が加わる場合を、フーリエ級数展開を用いてフーリエ係数に関する常微分方程式に変形する。次いで、初期および境界条件は不明であるとし、空間的に任意に設置された観測点から確率変数(ここでは濃度)が観測されるとして、この観測情報を元にしてカルマンフィルターにより各時点毎にフーリエ係数を推定しながら濃度予測を行う方法を提案する。さらに本手法を模擬発生データに対して適用しその有効性の検討を行っている。

2. 計算手法

ここでは、次式に示すような定係数1次元確率移流分散方程式を考えることにする。

$$\partial C(x,t)/\partial t + u \partial C(x,t)/\partial x = D \partial^2 C(x,t)/\partial x^2 - \gamma C(x,t) + \alpha \varepsilon(x,t) \quad (1)$$

ここに、 $C(x,t)$:濃度、 u :流速、 D :分散係数、 γ :一次反応係数、 α :システム雑音強度、 $\varepsilon(x,t)$:単位のパワースペクトル密度をもつ平均値0の正規性白色雑音。まず、式(1)のような確率項を含んだ微分方程式を解くため濃度 $C(x,t)$ および雑音項 $\varepsilon(x,t)$ を次式のようにフーリエ級数に展開する。

$$C(x,t) = M(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(t) \sin(2\pi mx/\ell) + B_m(t) \cos(2\pi mx/\ell)] \quad (2)$$

$$\varepsilon(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} [E_m(t) \sin(2\pi mx/\ell) + F_m(t) \cos(2\pi mx/\ell)] \quad (3)$$

式(2)、式(3)を式(1)に代入すると、 $M(t)$ および波数 m に対するフーリエ係数に関する連立常微分方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} dM/dt \\ dA_m/dt \\ dB_m/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -R_m & Q_m \\ 0 & -Q_m & -R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(t) \\ A_m(t) \\ B_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha E_m(t) \\ \alpha F_m(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{ここに、} R_m = D(2\pi m/\ell)^2 + \gamma, \quad Q_m = u(2\pi m/\ell) \quad (5)$$

さて、 x 方向に任意に配置された観測点から観測雑音 w を含んだ濃度 C が観測される場合を想定し、この観測情報を元にしてカルマンフィルターによりフーリエ係数 M, A_m, B_m をシステム状態量として逐次同定してゆき濃度 C の予測を行う場合を考える。すなわち、ここでは式(4)、(5)における u, D, γ を既知量とし、まず、時刻 $(t + \Delta t \cdot i)$ を $(k+i)$ 時点として式(4)を時刻 Δt で離散化して表わすと式(4)は M, A_m, B_m に対して線形方程式となり次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} M(k+1) \\ A_m(k+1) \\ B_m(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \gamma \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - R_m \Delta t & Q_m \Delta t \\ 0 & -Q_m \Delta t & 1 - R_m \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(k) \\ A_m(k) \\ B_m(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha E_m(k) \Delta t \\ \alpha F_m(k) \Delta t \end{bmatrix} \quad (6)$$

また、任意の x_i 地点における観測点の濃度 C は式(2)より

$$C(x_i, k) = [1 \cdots \sin(2\pi mx_i/\ell) \cos(2\pi mx_i/\ell) \cdots] [M(k) \cdots A_m(k) B_m(k) \cdots]^T + w(x_i, k) \quad (7)$$

ここに、 T は転置を表す。式(6)の右辺第1項のマトリックスをすべての m についてまとめ、また式(7)の右辺第1項のベクトルをすべての観測地点についてまとめてマトリックス表示すると、それぞれカルマンフィル

ターの遷移行列と観測行列となる。

3. 適用例とその考察

本報では、フーリエ級数展開の波数 m は20として打ち切り、 $u=1.0(\text{m/s})$, $D=0.5(\text{m}^2/\text{s})$, $\gamma=0.01(1/\text{s})$, $\Delta t=0.1(\text{s})$, $\ell=100(\text{m})$ を想定して、 M, A_m, B_m の初期値は濃度 C の形状が図-1のような初期状態となるように適当に与えて、500 時点程 C を模擬発生させた。図-1の実線に式(1)の確率変動項 ε および式(7)の観測雑音 w がない場合、図-2の実線に式(6)の $\alpha=0.0005$ とし、 $E_m(k)$ 、 $F_m(k)$ には m に関係なく平均値0、標準偏差1の正規乱数を、式(7)の $w(x_i, k)$ には平均値0、標準偏差0.01の正規乱数を与えた場合の模擬発生を示している。このとき $\alpha=0.0005$ に相当するシステム雑音のレベルは図-3のスペクトル図のnoise levelに示されている。この図より、波数 m が大きくなる程すなわち高周波成分のフーリエ係数程、雑音の影響を受けやすく、また時点が進む程低周波成分のフーリエ係数にも雑音の影響が強く作用することがわかる。次に、図-1、図-2の丸印はカルマンフィルターによる1時点先の C の予測値を示している。この場合カルマンフィルターにおける M, A_m, B_m の初期値は先見情報がないものとしてすべて0を与えた。図-1より雑音のない場合は、模擬発生値は滑らかに移行していることがわかり、またカルマンフィルターによる予測値はほとんど完全に模擬発生値に一致している。次に、図-2の雑音のある場合は、模擬発生値は全般に乱れており、時点が進行するとともに乱れは大きくなっている。またカルマンフィルターによる予測値をみると雑音に埋もれている高周波成分の小さな変動分布の予測は困難なものの、時点の進行とともに濃度分布が乱れても精度よく濃度分布形状を予測しているといえる。

4. むすび

本報では実時間観測データが得られるとして、確率変動項を含む微分方程式で表現される現象を予測する手法を提案しこれを模擬発生データに適用した結果、本手法が確率微分方程式で表現される現象の予測に有効であることを示した。今後さらに、 u, D, γ が未知の場合にもこれらの値も同時にカルマンフィルターで同定しつつ濃度予測を行えるよう本手法を発展させていくつもりである。

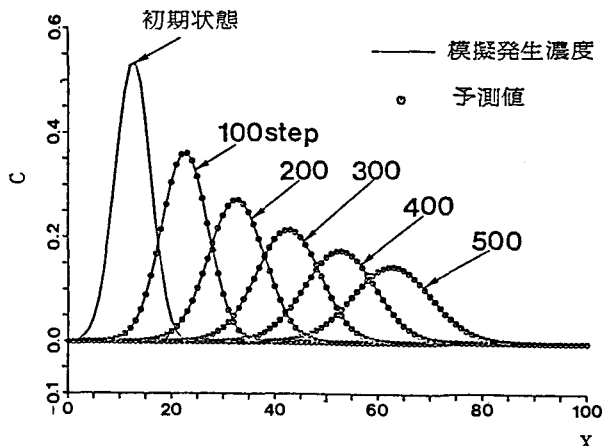


図-1 模擬発生濃度とその予測値 (雑音なし)

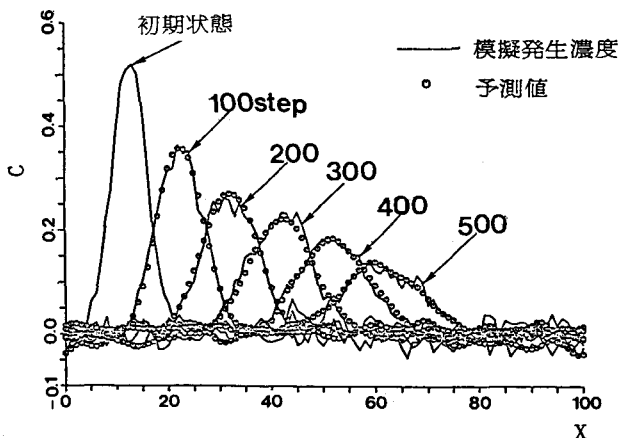


図-2 模擬発生濃度とその予測値 (雑音あり)

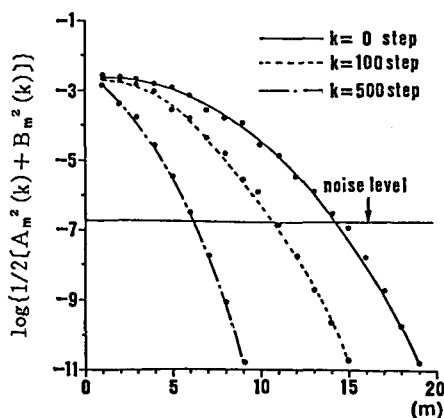


図-3 スペクトル分布の時間変化