

移流拡散問題の有限要素法解析

- 精度の検証 -

佐賀大学 学生員○松尾 竜也
正員 荒牧 軍治
正員 古賀 勝喜
正員 佐々木広光

1. まえがき

媒質が移動する場合の熱拡散、流れ場における物質の拡散等、移流拡散方程式で記述される現象は数多く存在する。この基本的な偏微分方程式である移流拡散方程式を、有限要素法を用いて解析する試みは多くの研究者によりなされ、大きな成果をあげている。特に、上流重み関数の導入によりベクレ数 = $u \Delta l / k$ (ただし、 u は流速、 Δl は1要素の長さ、 k は拡散係数)の大きなモデルにおいても、安定な解を得ることが確認され、有限要素法の利用範囲を拡大した。

しかし、有限要素法の安定性に関する検討は数多く見られるものの、その精度に関する検証は未だ十分とは言い難い。そこで本研究では1次元移流拡散問題の4種の境界条件における理論解を誘導し、有限要素解との比較を行なうことにより、有限要素解の安定性と精度に関する検討を行なった。

2. 1次元移流拡散方程式の理論解

次の1次元移流拡散問題を次の4つのケースの境界条件、初期条件で解く場合を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - u \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

[CASE-1] 初期条件 $\phi(0, x) = f(x)$

境界条件 $\phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0$

ただし拡散係数 k 、流速 u は $(0, 1)$ 区間で一定とする。次の演算子を用いる。

$$L = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} = k \frac{u}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{u}{k} x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2)$$

標準測度として次式を定義する

$$dm(x) = \frac{e^{\frac{u}{k} x}}{k} dx \quad (3)$$

任意の時刻における未知量は基本解 $P(t, x, y)$ を用いて次式で表わされる。

$$\phi(t, x) = \int P(t, x, y) f(y) dm(y) \quad (4)$$

$$\text{ただし } P(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y)$$

ここに ϕ_n はつぎの正規化された関数を取るものとする。

$$L \phi_n = -\lambda_n \phi_n, \int |\phi_n(x)|^2 dm(x) = 1 \quad (5)$$

今、 $\phi_n(x)$ として次の関数を与える。

$$\phi_n(x) = \sqrt{2k} e^{\frac{u}{2k} x} \sin n\pi x \quad (6)$$

$$L \phi_n = -k \left\{ \left(\frac{u}{2k} \right)^2 + (n\pi)^2 \right\} \phi_n$$

$$= -\lambda_n \phi_n$$

となり、式(5)の最初の条件を満たしている。

得られた ϕ_n を式(4)に代入すると、求める解は次式で与えられる。

$$\phi(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \bar{\phi}_n(x) \int_0^1 f(y) \bar{\phi}_n(y) e^{-\frac{u}{k} y} dy$$

初期条件 $f(x) = 1$ の場合は (7)

$$\phi(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \bar{\phi}_n(x) \frac{knt}{\lambda_n} [1 - (-1)^n e^{-\frac{u}{2k}}] \quad (8)$$

$$\bar{\phi}_n(x) = e^{\frac{u}{2k} x} \sin n\pi x \quad (9)$$

[CASE-2]

初期条件 $\phi(0, x) = 0$

境界条件 $\phi(t, 0) = 1, \phi(t, 1) = 0$

CASE-1の場合と同様の解析により、次の解析解を得る。

$$\phi(t, x) = 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) e^{\frac{u}{2k} x} \sin n\pi x \quad (10)$$

ただし、上記の解は定常解に近づくにつれて不安定となるので、次式を用いた方が収束の良い解が得られる。

$$\phi = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}k}{1 - e^k} - 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n} e^{\frac{1}{2}kx} \sin n\pi x \quad (11)$$

【CASE-3】

初期条件 $\phi(0, x) = 1 - x$

境界条件 $\phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = 0$

$$\phi = 2 \sum e^{-\lambda_n t} \bar{\phi}_n(x) \left[-\frac{p}{a^2 + p^2} + \frac{2ab}{(a^2 + p^2)^2} \{1 - e^{a(-1)^n}\} \right] \quad (12)$$

ただし、 $a = -u/2k, \quad p = n\pi$

【CASE-4】

初期条件 $\phi(0, x) = 0$

境界条件 $\phi(t, 0) = 1, \quad \phi(t, \infty) = 0$

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x - ut}{2(kt)^{0.5}} \right) + e^{\frac{ux}{k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + ut}{2(kt)^{0.5}} \right) \right\} \quad (13)$$

$K = .0333$
 $U = 1$
 $TIME/\tau = .5$
 $ALPHA = 0$
 $dt = .10000$
 $\circ T = 0.10000$
 $\bullet T = 0.30000$
 $\circ T = 0.50000$
 $\bullet T = 0.70000$
 $\circ T = 1.00000$
 $\bullet T = 1.50000$
 $\circ T = 2.00000$
 Δk

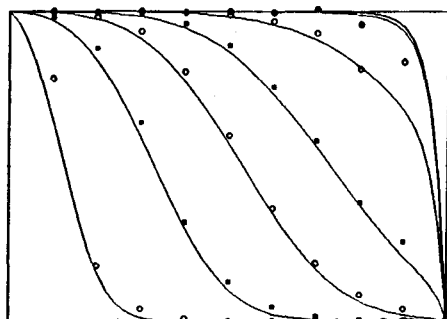


図-1 $Pe = 2, Cr = 1$

$K = .0333$
 $U = 1$
 $TIME/\tau = .5$
 $ALPHA = 0$
 $dt = .15000$
 $\circ T = 0.15000$
 $\bullet T = 0.45000$
 $\circ T = 0.75000$
 $\bullet T = 1.05000$
 $\circ T = 1.50000$
 $\bullet T = 2.25000$
 $\circ T = 3.00000$
 Δk

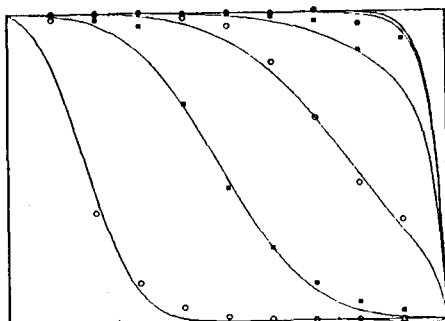


図-2 $Pe = 2, Cr = 1.5$

3. 有限要素解の精度検証

以上の4つのケースについて、有限要素解と理論解との比較検討を行なった。今回は重み関数として、形状関数Nを用いる、いわゆる Bubrov-Galerkin法について検討した。数多くの数値実験の結果、有限要素解の安定性及び精度に影響を与える因子は、セルベクレ数 $Pe = u\Delta x/k$ とクーラン数 $Cr = u\Delta t/\Delta x$ であることが明確となったので、セルベクレ数とクーラン数を種々変化させて、有限要素解と理論解の比較を行なった。解析結果の1部を示す。

図-1～3はセルベクレ数を2に固定し、 Δt を変えることによりクーラン数を変化させたものである。図-1はクーラン数1の場合であるが、途中の解はきわめて安定で精度の良い解となっているが、定常解に近づくにつれ理論解とのずれが目だってくる。図-2の $Cr=1.5$ のケースでは初期の段階で解の振動が発生している。 $Cr=3$ の場合は解が大きく振動する。図-4は $Pe=1.5$ とした時の解であるが、定常解においてもほぼ満足のいく結果を得ている。

4. 結語

4つのケースについて有限要素解と理論解の比較を行なったが、いずれの場合も、 $Pe < 2, Cr < 1$ の場合において、ほぼ満足する解を得た。

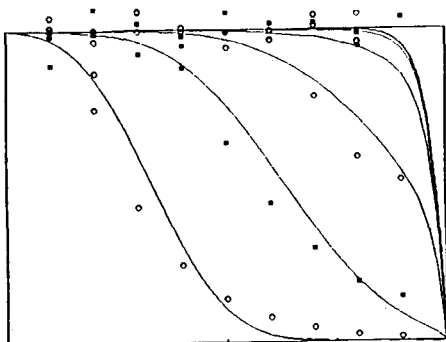


図-3 $Pe = 2, Cr = 3$

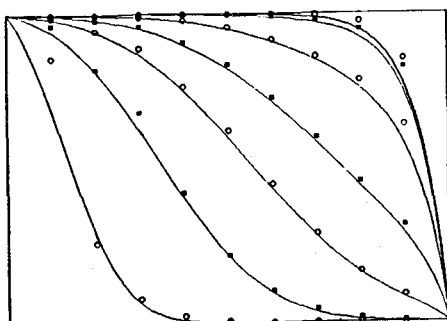


図-4 $Pe = 1.5, Cr = 1$