

移流拡散方程式の数値解法について

佐賀大学 正 大串浩一郎 九州大学 正 小松利光
九州大学 正 柴田敏彦 九州大学 学 朝位孝二

1. まえがき 移流拡散方程式を数値的に解く場合、精度に重点を置く方法と、計算の容易さに重点を置く方法がある。Holly-Preissmannのスキームや、小松・Hollyの 8-point method は前者の例として挙げられよう。後者には、小松らの 6-point method、同じく 4-point method¹⁾ が挙げられる。後者の2つの方法においても相対的な比較をすれば、スキームの中の使用している計算格子点の数が2個違ふ為、計算の容易さという立場に立てば、4-point methodの方が優れていると言えるであろう。なぜならば、6-point method では、境界外濃度の推定点数の数が2個であり、2次元問題において使用する計算格子点の数の合計が36点であるのに対し、4-point methodは、境界外濃度の推定点数の数が1個であり、2次元問題において使用する計算格子点の数が僅か16点であるからである。ところで、前報の 4-point methodは、過去の時間の濃度を使って濃度勾配を評価する際、移流拡散方程式を用いる為、diffusionを考慮する場合の計算において、必ずしも計算が容易とは言えなかった。そこで、本研究では、過去の時間ステップの濃度の値を使用する際、移流拡散方程式の直接的な使用を避ければ、4-point methodはどの程度の精度になるかを検証した。

2. 濃度の推定 4-point methodでは、既知の濃度の格子点は4点であるが、両側2点ずつ未知の濃度を推定し、計8点の濃度を用いてスキームを組むことにするので、その2点ずつの濃度の推定方法が問題になってくる。以下に推定の方法について述べる。

(1) まず、4点の濃度を用いて外挿により濃度を推定する方法を考える。図-1に示すように C_{i-2} 、 C_{i-1} 、 C_i 、 C_{i+1} を用いて3次曲線を求め、次に3次曲線上で、 x_{i-2} の点から $\alpha \Delta x$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) だけ離れた $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ の範囲の点の濃度 C_N を求め、 $(x_{i-2} + \alpha \Delta x, C_N)$ と (x_{i-2}, C_{i-2}) を結んだ直線の延長線上に C_{i-3} を推定する。 α の決定は、波長 $L=1$ 、振幅 $A=1$ のサインカーブ上の値を推定し、真値との残差平方和を1波長間合計した値が、最小になるように決定した

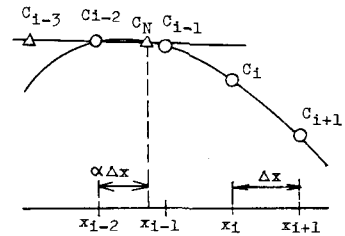


図-1 濃度の推定

($L/\Delta x$ の値によって α は異なる。計算は、4個の点のサンプリング箇所を $L/20$ ずつずらして20回繰返し行った)。6-point method の移流の計算では、厳密解との誤差のスペクトル解析の結果、高周波成分(特に $L/\Delta x=4,5,6$) において影響が大きいことが判ったので、ケースA ($L/\Delta x=4,5,6$) と、次に高い周波数成分のケースB ($L/\Delta x=7,8,9$) の2つの場合について α の計算を行い、 $\alpha=0.3(\text{ケースA})$ 、 $\alpha=0.0(\text{ケースB})$ を得た。

(2) 次に、左側の $\hat{C}_{i-3}^n$ 、 $\hat{C}_{i-4}^n$ の推定を行う(右肩の n は n 時間ステップを表わす)。図-2のように、 n 時間ステップの4点 C_{i-2}^n 、 C_{i-1}^n 、 C_i^n 、 C_{i+1}^n より(1)の方法により C_{i-3}^n を推定する。次に $n-1$ 、 $n-2$ 時間ステップの4点(既知量)を用いて同様にして $\hat{C}_{i-3}^{n-1}$ 、 $\hat{C}_{i-3}^{n-2}$ を求め、 $\hat{C}_{i-3}^n$ と $\hat{C}_{i-3}^{n-1}$ 、 $\hat{C}_{i-3}^{n-2}$ により直線の外挿を用いて $\hat{C}_{i-3}^n$ を求める。得られた $\hat{C}_{i-3}^n$ と $\hat{C}_{i-3}^{n-1}$ を次のように荷重平均して $\hat{C}_{i-3}^n$ が得られる。但し、 γ_2 は重みである。

$$\hat{C}_{i-3}^n = (1 - \gamma_2) \cdot \hat{C}_{i-3}^n + \gamma_2 \cdot \hat{C}_{i-3}^{n-1} \quad (a)$$

γ_2 の決定は、サインカーブを用いてクーラン数 Cr を0.0から1.0まで0.1ずつ変えて計算した誤差を合計して求めた。 γ_2 は $\gamma_2 = -0.40(\text{ケースA})$ 、 $\gamma_2 = -0.55(\text{ケースB})$ を得た。求めた $\hat{C}_{i-3}^n$ 、 $\hat{C}_{i-3}^{n-1}$ 、 $\hat{C}_{i-3}^{n-2}$ を用いて同様にして $\hat{C}_{i-4}^n$ を次式で推定する。

$$\hat{C}_{i-4}^n = (1 - \gamma_1) \cdot \hat{C}_{i-4}^n + \gamma_1 \cdot \hat{C}_{i-4}^{n-1} \quad (b)$$

γ_1 は、 $\gamma_1 = 0.00(\text{ケースA})$ 、 $\gamma_1 = -0.14(\text{ケースB})$ であった。

(3) 続いて、右側の $\hat{C}_{i+2}^n$ 、 $\hat{C}_{i+3}^n$ の推定を行う。まず、(1)の外挿法を用いて C_{i-2}^n 、 C_{i-1}^n 、 C_i^n 、 C_{i+1}^n より $\hat{C}_{i+2}^n$ を求める。次に C_{i-1}^n 、 C_i^n 、 C_{i+1}^n より $\hat{C}_{i+2}^{n-1/2}$ 、 $\hat{C}_{i+2}^{n-1}$ 、 $\hat{C}_{i+2}^{n-2}$ を各々2次曲線を内挿することにより求める。得られた $\hat{C}_{i+2}^{n-1/2}$ 、 $\hat{C}_{i+2}^{n-1}$ と $\hat{C}_{i+2}^n$ 、 $\hat{C}_{i+2}^{n-1}$ を用いて、図-3のように斜め方向に(1)の外挿法を利用して $\hat{C}_{i+2}^n$ を計算する。 $\hat{C}_{i+2}^n$ と $\hat{C}_{i+2}^{n-1}$ の荷重平均により、次式のように $\hat{C}_{i+2}^n$ が求まる。

$$\hat{C}_{i+2}^n = (1 - \gamma_3) \cdot \hat{C}_{i+2}^n + \gamma_3 \cdot \hat{C}_{i+2}^{n-1} \quad (c)$$

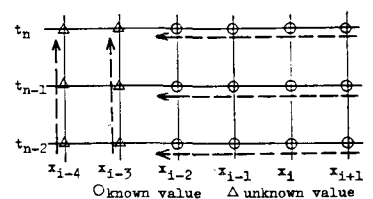


図-2 $\hat{C}_{i-3}^n$ 、 $\hat{C}_{i-4}^n$ の推定

γ_3 は、 γ_1 、 γ_2 と同様にサインカーブにより最適値を計算する。 γ_3 の計算結果は、 $\gamma_3=1.30(\text{ケSA})$ 、 $\gamma_3=1.56(\text{ケSB})$ であった。求めた $\hat{C}_{i+2}^n$ 、 $\hat{C}_{i+2.5}^n$ 、 $\hat{C}_{i+2.5}^n$ を用いて、同様に $\hat{C}_{i+3}^n$ を次の式で推定する。

$$\hat{C}_{i+3}^n = (1 - \gamma_4) \cdot \hat{C}_{i+3}^n + \gamma_4 \cdot \hat{C}_{i+3}^n \quad (d)$$

γ_4 は、 $\gamma_4=-1.10(\text{ケSA})$ 、 $\gamma_4=-0.93(\text{ケSB})$ であった。

3. 濃度勾配の推定 以上のようにして、8点の濃度が得られ、次に、濃度勾配を求める為にそれらの8点の内、4点ずつ隣合う格子の濃度を選ぶ。それぞれの点の濃度は精度が異なるので、求める濃度勾配に荷重を掛けて次式のように平均をとる。

$$CX_{i-1}^n = \{\lambda_1 \cdot CX_{i-1}^{n(1)} + \lambda_2 \cdot CX_{i-1}^{n(2)} + \lambda_3 \cdot CX_{i-1}^{n(3)} + \lambda_4 \cdot CX_{i-1}^{n(4)}\} / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (e)$$

$$CX_i^n = \{\psi_1 \cdot CX_i^{n(1)} + \psi_2 \cdot CX_i^{n(2)} + \psi_3 \cdot CX_i^{n(3)} + \psi_4 \cdot CX_i^{n(4)}\} / (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \quad (f)$$

$$CX_{i+1/2}^n = \{\zeta_1 \cdot CX_{i+1/2}^{n(1)} + \zeta_2 \cdot CX_{i+1/2}^{n(2)} + \zeta_3 \cdot CX_{i+1/2}^{n(3)}\} / (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \quad (g)$$

ここに、 λ_i 、 ψ_i ($i=1,2,3,4$)、 ζ_j ($j=1,2,3$)は荷重であり、これまでと同様にサインカーブにより最適な値を決定する。 CX の右肩の数字(k)は、 CX^n をTaylor級数解析により求める際、 C_{i+k-5}^n 、 C_{i+k-4}^n 、 C_{i+k-3}^n 、 C_{i+k-2}^n を用いたことを意味する。荷重の計算結果は、表-1のようである。

表-1

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ζ_1	ζ_2	ζ_3
ケSA	-0.06	1.00	0.13	0.45	0.36	0.13	1.00	-0.04	-0.13	1.00	-0.09
ケSB	-0.04	1.00	1.39	0.56	0.36	1.00	1.00	-0.16	-0.06	1.00	-0.05

4. 最終的な評価式の荷重 x_{i-1} と x_i の間にあるGという点の濃度 C_G^n を推定する為に、クーラン数 Cr の3次関数による、3つの評価式の荷重平均をとる。それらの評価式は、2つの濃度 C_{i-1}^n 、 C_i^n 及び3つの濃度勾配 CX_{i-1}^n 、 $CX_{i-1/2}^n$ 、 CX_i^n の内、2個を用いて作られる。最終的な式は、

$$C_G^n = \{\tau_1 \cdot f_1(C_{i-1}^n, C_i^n, CX_{i-1}^n, CX_i^n) + \tau_2 \cdot f_2(C_{i-1}^n, C_i^n, CX_{i-1}^n, CX_{i-1/2}^n) + \tau_3 \cdot f_3(C_{i-1}^n, C_i^n, CX_i^n, CX_{i-1/2}^n)\} / (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \quad (h)$$

となる。荷重の計算結果は、 $\tau_1=14.0$ 、 $\tau_2=2.35$ 、 $\tau_3=-7.89(\text{ケSA})$ 、 $\tau_1=1.14$ 、 $\tau_2=1.07$ 、 $\tau_3=1.00(\text{ケSB})$ であった。

5. 純粋な移流の計算及び結論 図-4に $t=0(\text{s})$ で $x=1,400(\text{m})$ に中心を持つ標準偏差 $\sigma=264(\text{m})$ 、ピーク値 $=10$ のGauss型濃度分布が、一様流速 $U=0.5(\text{m/s})$ で下流へ移流された場合の計算結果が示されている。ケースAは正負共厳密解より大きくなっている。考えられる理由は、 $L/\Delta x=4,5,6$ における誤差を小さくした為に、逆に $L/\Delta x=7,8,9$ の誤差が増大した為であると思われる。ケースBも負の値は少し大きい、前報の4-point methodと同程度の誤差であることを考慮すると、悪い精度の結果ではないと言える。以上のことから、 $L/\Delta x=4,5,6$ における誤差を取り除くことは難しく、むしろ、 $L/\Delta x=7,8,9$ の誤差を軽減するケースBの計算法が、効果的であることが判った。本研究の4-point methodは、前報の4-point methodと比べて、より容易に2次元、3次元問題に適用できることから、非常に有用な計算法であると言えることができるであろう。

6. 参考文献 1) 大串・小松・仲敷・宇都宮：移流型物質輸送の数値計算法について、第41回土木学会年次学術講演会講演概要集第2部、pp.255-256,1986

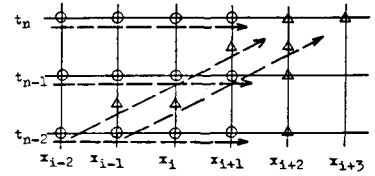


図-3 C_{i+2}^n 、 C_{i+3}^n の推定

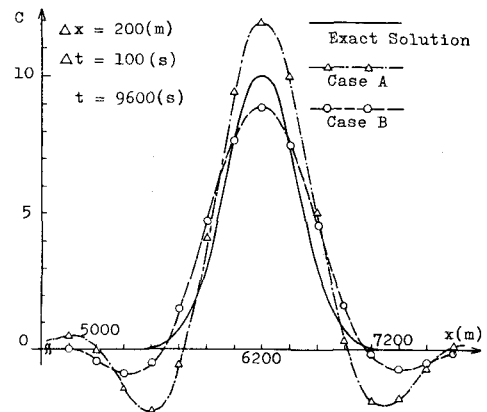


図-4 Gauss型濃度分布の移流計算