

移流型物質輸送の3次元数値計算

○九州大学大学院 学生員 朝位孝二
九州大学工学部 正員 小松利光
佐賀大学工学部 正員 大串浩一郎

1. 目的 水域において、密度差を持たない物質の輸送問題を取扱う際には、移流と拡散という2つの物理現象を含む偏微分方程式を解く必要がある。移流と拡散を1 TIME STEP 毎に別個に取扱うSPLIT-OPERATOR-APPROACH は、各 PROCESS に対して最適な計算方法を選択できる利点を持つ。拡散に対してはCrank-Nicholson の方法などにより、かなり正確に計算することができる。しかしながら、移流に対しては単純な差分スキームでは精度の良い解を得ることができない。そこで移流計算に対しては、マーチンの方法および6 POINT METHODを適用し、3次元移流計算への妥当性を検討した。

2. 特性曲線法

簡単のために1次元移流方程式を考える。1次元移流方程式の特性曲線表示は、

$$\frac{\partial X}{\partial t} = U \quad \text{上} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

ここに、Uは流速、Cは物質の濃度である。

ゆえに図-1において、時刻 t_{n+1} における X_1 点の濃度は次式で与えられる。

$$C^{n+1}_1 = C^n_{\xi} \quad (2)$$

ここに、添字 i は計算格子の場所、n は時刻を表わす指標である。

かくて、問題は C_{ξ} をいかにして正確に評価するかに移る。マーチンの方法は、濃度 C^{n-2}_1 、 C^{n-1}_1 、 C^n_1 、 C^{n+1}_1 を用いて単純に3次曲線を内挿して C_{ξ} を評価する方法である。

$$C^{n+1}_1 = f(C^{n-2}_1, C^{n-1}_1, C^n_1, C^{n+1}_1, \alpha) \quad (3)$$

ここに、 $\alpha = \frac{X_1 - \xi}{X_1 - X_{1-1}} = \frac{U \Delta t}{\Delta X}$ 通常これはクーラン数と呼ばれる。

6 point method は、濃度 C^{n-3}_1 、 C^{n-2}_1 、 C^{n-1}_1 、 C^n_1 、 C^{n+1}_1 、 C^{n+2}_1 を用いて濃度勾配を推定して、推定した濃度勾配と濃度を用いて3次曲線を内挿してC を評価する方法である。

$$C^{n+1}_1 = f(C^{n-3}_1, C^{n-2}_1, C^{n-1}_1, C^n_1, C^{n+1}_1, C^{n+2}_1, \alpha) \quad (4)$$

3. 3次元移流計算

3次元移流拡散方程式は次式になる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} + W \frac{\partial C}{\partial Z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \quad (5)$$

ここに、U、V、WはそれぞれX方向、Y方向、Z方向の流速である。また、 D_x 、 D_y 、 D_z はそれぞれX方向、Y方向、Z方向の拡散係数である。移流だけを考えれば式(5)の右辺は0になる。

特性曲線法を3次元にまで拡張すると式(2)に対応する式は

$$C^{n+1}_{j,k} = C^n_{\xi,\eta,\zeta} \quad (6)$$

となり、空間内の値を推定することになる。

ここに、i、j、kはそれぞれX方向、Y方向、Z方向の計算格子の場所を示す指標である。

$C^n_{\xi,\eta,\zeta}$ を推定するためにまず、X方向にマーチンの方法を適用して C^n_{ξ} の値を求める。

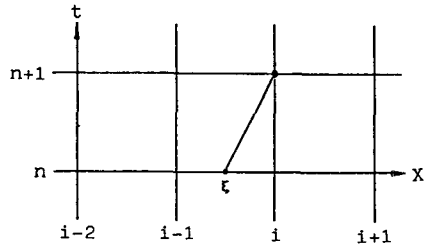


図-1 1次元計算格子

$$C_{j,k}^n = f(C_{j-2,k}^{n-1}, C_{j-1,k}^{n-1}, C_{j,k}^{n-1}, C_{j+1,k}^{n-1}, \alpha_x) \quad (7)$$

次に、Y方向にマーチンの方法を適用して、 C^n の値を求める。

$$C_{j,\eta}^n = f(C_{j-2,\eta}^{n-1}, C_{j-1,\eta}^{n-1}, C_{j,\eta}^{n-1}, C_{j+1,\eta}^{n-1}, \alpha_y) \quad (8)$$

最後に、Z方向にマーチンの方法を適用して C^n の値を求める。

$$C_{j,\eta,k}^n = f(C_{j,\eta,k-2}^{n-1}, C_{j,\eta,k-1}^{n-1}, C_{j,\eta,k}^{n-1}, C_{j,\eta,k+1}^{n-1}, \alpha_z) \quad (9)$$

ここに、 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ はそれぞれX方向、Y方向、Z方向のクーラン数である。

6 POINT METHOD についても同様の方法で $C_{j,\eta,k}^n$ を推定する。

4. 計算結果 初期条件として、 $\sigma = 264m$ 、ピークの濃度10の点対称のガウス分布を与え、濃度の中心は $X = 1400m, Y = 0m,$

$Z = 0m$ に位置する。また境界条件は、境界の影響を受けないように広く計算格子を取ることににより、0とおける。

流速 $U = V = W = 0.5m/sec$ で9600秒間移流させた。

図-3 は、9600秒後の濃度の中心を通りX軸に平行な軸で測った濃度分布である。マーチンの方法も6-POINT METHOD もピークが落ちていることがわかる。空間のある一点の濃度を推定するのにマーチンの方法ならば21回、6-POINT METHODならば49回使用することになる。このため3次元計算は、かなり誤差が蓄積されやすい計算だといえる。

図-4 および図-5 は拡散係数の入った場合の計算である。弱い拡散のある場合、 $D_x = D_y = D_z = 0.974415m^2/sec$ と強い拡散のある場合、 $D_x = D_y = D_z = 2.1319m^2/sec$ の二通りを計算した。マーチンの方法は実用には向かないが、6-POINT METHODは拡散が強いほど良い近似が得られることがわかる。

5. 結論 純粋移流に対しては、マーチンの方法も6 POINT METHODも精度の良い結果は得られなかったが、拡散のある場合では6 POINT METHOD は比較的有効な手段であることが示唆された。しかし、境界条件の取扱いや電子計算機のメモリー、演算時間等の見地から、マーチンの方法と同じく4個の濃度のみを使用し、かつ6-POINT METHODと同精度の4-POINT METHODを開発する必要がある。また、4-POINT METHODならば空間のある一点の濃度を推定するのに21回ですむので、純粋移流に対しても実用性が期待できる。

6. 参考文献

小松利光、仲敷憲和、大串浩一郎： 河川や沿岸部における拡散物質の輸送拡散の計算法、第31回海岸工学講演会、1984

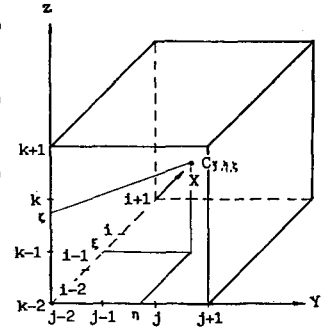


図-2 3次元計算格子

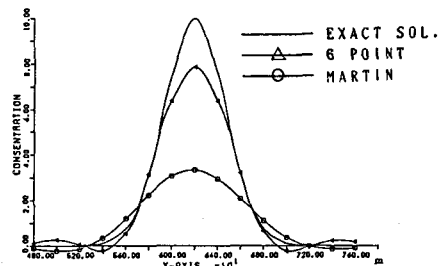


図-3 計算結果

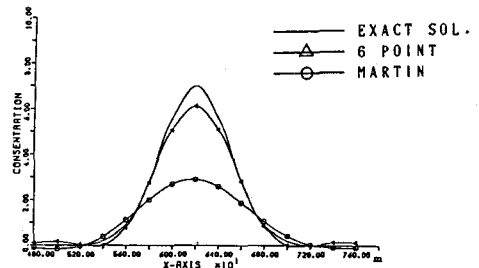


図-4 $D = 0.974415(m^2/sec)$ の場合の計算結果

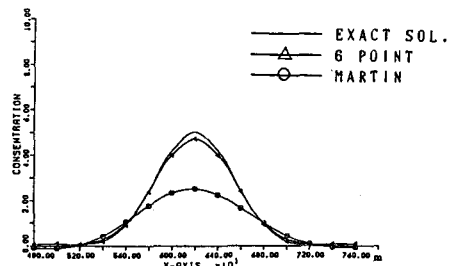


図-5 $D = 2.1319(m^2/sec)$ の場合の計算結果