漸拡部における密度流の3次元解析

長崎大学大学院　学生員　○桑元　伸二
長崎大学工学部　正　員　野口　正人
長崎大学工学部　正　員　中村　武弘

1. はじめに

浮遊流砂量が河川の治水・利水・環境保全に関与する問題として、ダム貯水池の濁水問題や河口部での埋砂問題等が上げられるが、これらの現象は、いずれも、流水断面積が拡大することに伴う流れの減速に起因するものである。従来、急拡部の流れは3次元噴流の取り扱いに見られるように、通常、流速分布の相似性が仮定されるが、前述された流れ場では漸拡部側壁による流れの拘束により、そのような仮定は必ずしも成立しない。

上述されたことから、本論では、まず、漸拡流れの3次元性を明らかにする手法を示すとともに、成層流場における濁質の浮遊拡散・沈降の機構を明らかにしようとするものである。

2. 基礎方程式とその離散化

一般に、非圧縮性3次元流に対する連続方程式・運動方程式は、次のように表される。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad (i, j = 1\sim3) \qquad (2)$$

u_i；速度成分，F_i；外力加速度成分，P；圧力，ϵ_{ij}；渦動粘性係数，x_i；空間変数，t；時間変数，である。

ここでは、まず単層流に対して上式を離散化し、3次元流に対する数値シミュレーション法を示す。

式(1)について、底面から水面まで積分し、水面と底面の運動学条件を考慮すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{\zeta} u_1\, dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h}^{\zeta} u_2\, dx_3 \qquad (3)$$

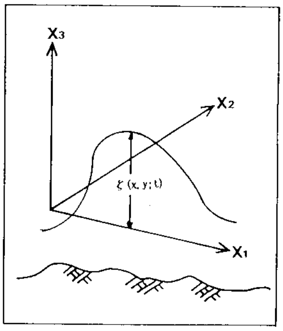
が求まる。ここで、静水圧分布が近似的に成り立つものとすると、運動方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) \qquad (4)$$

ただし、$i = 1\sim2$，$j = 1\sim3$

とする。従って、鉛直方向の流速は、式(1)を底面からx_3まで積分し、底面での運動学的条件を考慮すると、

$$u_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{x_3} u_1\, dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h}^{x_3} u_2\, dx_3 \qquad (5)$$



図－1　座標系

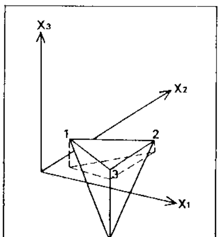
と表される。ここに、ζ；基準水表面からの水位，h；基準水表面から底面までの深さ，g；重力加速度である。

上式を有限要素法を用いて離散化するため、汎関数が明らかでなくても定式化が可能なGalerkin法を用いることとすると、次の様になる。（ただし、ζは水面での三角形一次有限要素で、u_1，u_2は四面体一次有限要素で内挿補間する。この時、それぞれの形状関数はψ_i，ϕ_αで表す。）

$$CCT_{ij}\,\dot{\zeta}_j = -CCP_{k,ij}\,FL_{k,j} \qquad (6)$$

$$CMT_{\alpha\gamma}\,\dot{u}_{k,\gamma} + CM_{\alpha\gamma}\,u_{k,\gamma} = -g\cdot CMP_{k,\alpha\gamma}\,\zeta_\gamma + CMD_{\alpha\gamma}\cdot\epsilon u_{k,\gamma} + \Pi_{k,\gamma} \qquad (7)$$

ここに、$\zeta = \psi_i \zeta_i$，$u_i = \phi_\alpha u_{i,\alpha}$



図－2　有限要素

$$CMT_{\alpha\gamma} = \int \phi_\alpha \phi_\gamma \, dV, \quad CM_{\alpha\gamma} = \int \phi_\alpha \phi_\beta \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x_\ell} dV \cdot u_{\ell,\beta}, \quad CMD_{\alpha\gamma} = -\int \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x_\ell} dV$$

$$CMP_{\alpha\gamma} = \int \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x_k} dV, \quad CCT_{ij} = \int \psi_i \psi_j \, dS, \quad CCP_{ij} = \int \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} dS$$

ただし、$i, j, \ell = 1 \sim 3$　$\alpha, \beta, \gamma = 1 \sim 4$　$k = 1 \sim 2$　であり、$FL_{k,j}$は水面下のk方向のフラックス量で、$\Pi_{k,\alpha}$は計算対象領域の境界条件より定まる。

なお、時間変数に関する離散化は、Two-Step Lax Wendroff法を用い、差分化することとした。

3、数値計算

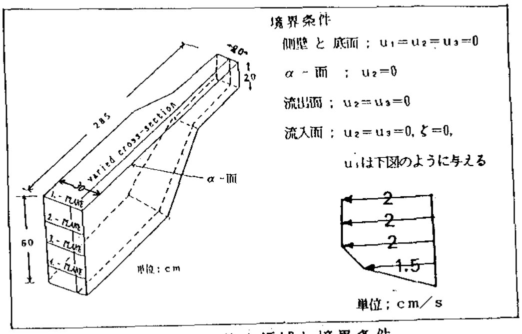


図 － 3　計算領域と境界条件

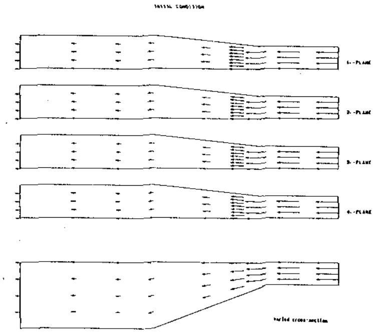


図 － 4　初期値（3次元ポテンシャル流）

漸拡部における流れの3次元性を明らかにするため、図－3に示された領域を対象にして計算を行う。ここでは、定常流を取り上げることとし、非定常解析による収束値を採用することとした。まず、計算を始めるにあたって、初期条件として、流速は有限要素法で解析した3次元ポテンシャル流れの結果(図-4)を用いることとし、ζに対しては、零とした。

計算法の詳細は省略するが、計算時間と容量の節約のために、質量行列に対しては、対角化を行った。また、渦動粘性係数は一定（$\epsilon = 0.01$ cm^2/s）として取り扱った。今回の計算では、要素数864，節点数245，時間刻み幅0.01秒である。計算結果を、図－5に示す。現段階では、実験を行っていないため計算結果の妥当性を、直ちに論じることはできないが、逆流域の範囲が求められており、濁質を含んだ流れを取り上げた場合の濁質供給域を明らかにし得るものと思われる。なお、本計算における水面勾配は、ほぼ、1/1500であった。

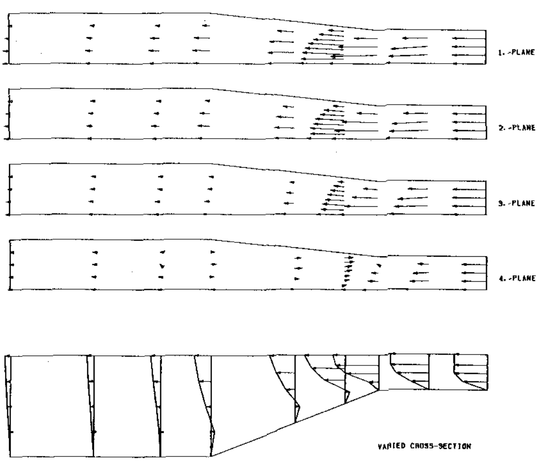


図 － 5　計算結果

4、おわりに

本論で提示された数値解法は、3次元のNavier・Stokes方程式を、直接、解くことなく、計算時間を節約して流れの3次元性を明らかにするために、有効な手法と考えられる。ところで、本方法を成層流場の問題に、適用するためには、内部境界面上で力学的条件・運動学的条件を満たすようにすることのほか、渦動粘性係数の値の設定等についても今後、検討していかねばならない。

最後に、本研究は、昭和61年度の文部省科学研究費（一般C，代表者：椿教授）の助成を受けたことを記し、謝意を表します。