

板の曲げ振動解析に対する差分伝達マトリックス法の適用

東海大学 正員 右田泰弘
東海大学 正員 遠田良喜

1. まえがき

有限要素法(FEM)は、広い範囲の構造解析に用いられているが、これを大型構造物解析に用いたり、また、高精度の解を得るため、要素分割を多くすると、係数マトリックスの大きさが急激に増大し、大容量のコンピュータを必要とする。これに対し、伝達マトリックス法は未知量が構造物の一端の自由度のみでよく、コンピュータの記憶容量を大幅に節約できること、また、理論体系と演算形式が明快であることなどから、広く構造解析に用いられている。コンピュータの記憶容量の節約を目的として、FEMと伝達マトリックス法を組み合わせたFETM法が開発されている。

本報は、同じ目的で既に提唱している^{1),2)}、差分法と伝達マトリックス法を組み合わせた差分伝達マトリックス法(FDTM法)を板の曲げ振動に適用し、その応用範囲の拡張したものである。

2. 伝達方程式

板の曲げ振動の基礎微分方程式は

$$W,xxxx+2W,xyyy+W,yyyy-\rho t\omega^2/D W=0 \quad \dots (1)$$

である。ここに、 W は形状関数、 ρ は単位体積当りの質量、 t は板の厚さ、 ω は円振動数、 D は板の曲げ剛性である。

式(1)を差分表示するために、 $a \times b$ の板を図-1に示すように、 $(n-1) \times (m-1)$ に分割する。

G_{3v} を単位マトリックス、 $C=(\lambda y/\lambda x)^2$ 、 $k=(\lambda^4 C^2 \rho t/D)\omega^2$ とし、

$$G_3^* = G_3 - k_v G_{3v} \quad \text{とすると、}$$

式(1)は k 列目について、中心差分を用い、次のようになる。

$$G_1 W_{k-2} + G_2 W_{k-1} + G_3^* W_k + G_2 W_{k+1} + G_1 W_{k+2} = 0 \quad \dots (2)$$

ここに、 G_1, G_2, G_3 は係数マトリックス、 $W_{k-2}, \dots, W_{k+2}$ は $k-2, \dots, k+2$ 列目の形状関数より成る列ベクトルである。

式(2)と w の1,2,3階の微分係数の差分表示を連立させることにより、1組の連立方程式が得られる。 $k+1$ 列目についても、同一手順で連立方程式が求められるので、これら2組の連立方程式と w の微分係数と断面力との関係を考慮することにより、次の格間伝達方程式が求められる。詳細は文献2)を参照されたい。

$$V_k^R = F_k V_k^L \quad \dots (3)$$

ここに、 V_k^R, V_k^L は第 k 番目の長方形要素群の右端、左端の状態量ベクトルである。また、 $k+1$ 列目における変位の連続条件と力の釣合条件は、

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R \quad \dots (4)$$

と表すことが出来る。 P_k は単位マトリックスである。

3. 解析手順

最左端の自由度から成る初期ベクトルを A 、境界マトリックスを R として、伝達計算を最右端まで実施すると、最右端の状態量ベクトル V_{n-1}^R が

$$V_{n-1}^R = F_{n-1} P_{n-2} \dots F_1 A \quad \dots (5)$$

として求まる。ここで、最右端の境界マトリックスを R' とすると、境界条件式

$$R' V_{n-1}^R = 0 \quad \dots (6)$$

を求めることが出来る。式(6)は $D A = 0$ なる同次方程式であるから、

$|D| = 0$ を満足する k_v をくり返し計算で求め、再び最左端より伝達計算を行えば、振動モードを求めることが出来る。

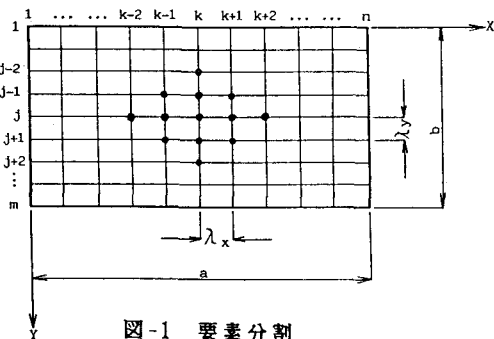


図-1 要素分割

4. 数値計算と考察

FDTM法の計算精度確認のため、2辺自由、両端単純支持板（アスペクト比 $a/b=2.5$ ）の1次～6次までの円振動数と振動モードを求め、図-2と図-3に示した。計算精度は十分であると考えられる。また、振動モードは既往の結果と一致している。

図-4には、各解析法の未知数の数と係数マトリックスの大きさを比較しているが、図からFDTM法が、これらは最も小さく、コンピュータの記憶容量の節約の面から非常に有利である。

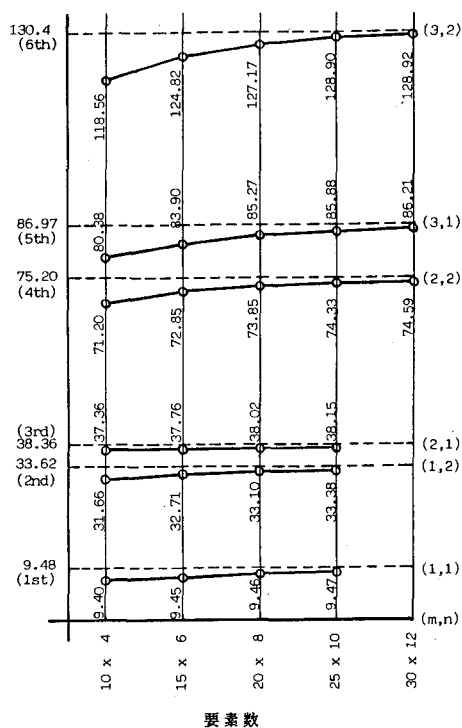


図-2 数値計算結果（円振動数）

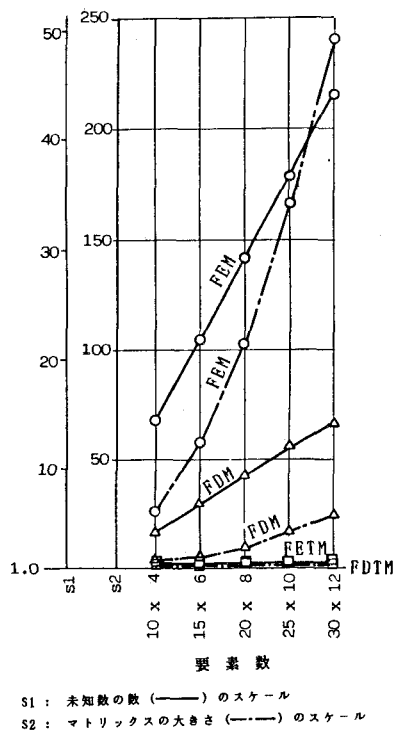


図-4 未知数の数とマトリックスの大きさの比較

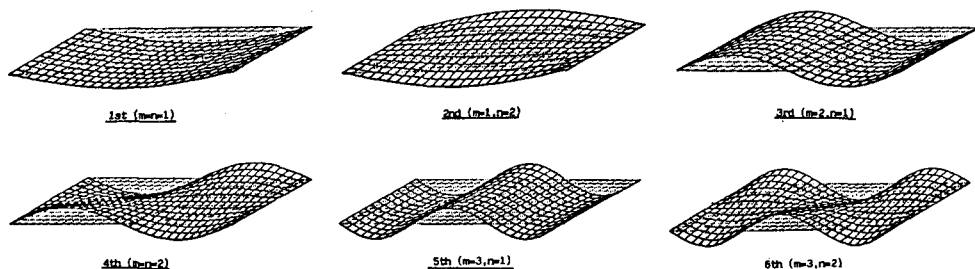


図-3 振動モード

参文 1). 右田・遠田: 板の曲げの解析に対する差分伝達マトリックス法の提唱, 昭和60年度西部支部講演概要集。2) 右田・遠田: 差分伝達マトリックス法による板の曲げの解析, 東海大学工学部紀要, Vol.25, No.2, pp.169-176。3). 関谷社はか: 平板構造強度設計便覧, 朝倉書店, 1982。4). 成岡・遠田: 伝達マトリックス法, 培風館, 1970。