

部分修正された振動系の固有値解析法の比較について

熊本大学 学生員○佐藤啓治 熊本大学 正員 平井一男
八代高専 正員 水田洋司 佐世保重工 正員 片山拓朗

1) まえがき

構造物の一部が修正された時、修正前の構造物 System A の固有値解を用いて、修正後の構造物 System B の固有値を求める方法は既に提案されているが、多くの論文は定式化について述べており、導入された式を解く方法について検討している論文は少ない。そこでこの論文では、一部修正の考えで定式化された (System B) の振動数方程式を、行列式と有理関数で表わす式を提案し、Laguerre法・Newton-Raphson法・Halley法・Cauchy法・Muller法を用いて振動数方程式を効率よく解く方法について述べている。また、数値計算では、各解析法による計算時間・計算精度を比較し、妥当性を検討している。

2) 振動数方程式の解法

剛性マトリックス (K) に ΔK 、質量マトリックス (M) に ΔM の部分修正を受けた振動系 System B の自由振動の式は

$$(\mathbf{I} + (\Delta K - \lambda \Delta M) \cdot \mathbf{f}_d(\lambda)) \cdot (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{W}_b = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{W}_b = \mathbf{f}_d(\lambda) \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_d = \sum_{i=1}^N \phi_i \phi_i^T / (\lambda_i^2 - \lambda) \quad (3)$$

ここに、Tは転置、添字 a・b は系、N は系の自由度を示し、 λ は固有円振動数の 2 乗、W は変位ベクトル、F は外力ベクトル、 ϕ_i は固有モードを示す。(1) 式より System B の振動数方程式は

$$\Delta_b(\lambda) = \Delta(\lambda) \cdot \Delta_a(\lambda) = 0 \quad (4)$$

$$\Delta(\lambda) = \text{Det} (\mathbf{I} + (\Delta K - \lambda \Delta M) \cdot \mathbf{f}_d) \quad (5)$$

$$\Delta_a(\lambda) = \text{Det} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \quad (6)$$

ここに、 $\Delta_a(\lambda) = 0$ は System A の振動数方程式である。

そこで $\Delta_b(\lambda)$ は λ の多項方程式であるので、その反復解法として以下の

(A) ~ (E) の 5 つの方法を考える。

(A) Laguerre's Iteration Formula

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - N / [\alpha_k \pm \sqrt{(N-1) \cdot (N\beta_k - \alpha_k^2)}] \quad (7)$$

(B) Newton-Raphson's Iteration Formula

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - 1 / \alpha_k \quad (8)$$

(C) Halley's Iteration Formula

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha_k / (1/2 (\alpha_k^2 + \beta_k)) \quad (9)$$

(D) Cauchy's Iteration Formula

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - (\alpha_k + \sqrt{2\beta_k - \alpha_k^2}) / (\alpha_k^2 - \beta_k) \quad (10)$$

(E) Müller's Iteration Formula

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + [\Delta_b(\lambda_k)(\Delta_b(\lambda_{k-1}) - \Delta_b(\lambda_{k-2}))] / H_k \quad (11)$$

$$H_k = \Delta_b(\lambda_{k-1})\Delta_b \left[\lambda_k, \lambda_{k-1} \right] - \Delta_b(\lambda_{k-2})\Delta_b \left[\lambda_k, \lambda_{k-2} \right]$$

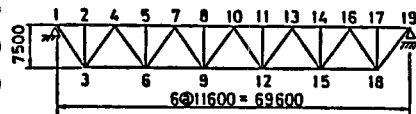
$$\Delta_b \left[\lambda_k, \lambda_{k-1} \right] = (\Delta_b(\lambda_k) - \Delta_b(\lambda_{k-1})) / (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \quad (12)$$

また、(A) ~ (D) の 4 つの方法では計算の都合上

$$\alpha_k = \Delta_b^{(1)}(\lambda_k) / \Delta_b(\lambda_k) \quad (13)$$

$$\beta_k = (\Delta_b^{(11)}(\lambda_k) / \Delta_b(\lambda_k))^2 - \Delta_b^{(2)}(\lambda_k) / \Delta_b(\lambda_k) \quad (14)$$

としている。ここに、上付添字 () は λ に関する微分階級を示す。これを (4) 式を用いて書き直すと、



E=2.1*10⁶ kg/cm²

図 1 19節点トラス橋

表 1 計算時間の比較 (SEC)

METHOD		各法による比較 (全モード数使用)	
		TIME	MODE
		1	3
JACOBI METHOD		629	630
QR METHOD		101	159
Laguerre's METHOD		307	662
Newton's METHOD		330	617
Halley's METHOD		325	
Cauchy's METHOD			

$$\alpha_k = \Delta_{(k)}^{(1)} / \Delta_{(k)} - \sum_{i=1}^N [1 / (\lambda_i^a - \lambda)] \quad (15)$$

$$\beta_k = (\Delta_{(k)}^{(1)} / \Delta_{(k)})^2 - \Delta_{(k)}^{(2)} / \Delta_{(k)} + \sum_{i=1}^N [1 / (\lambda_i^a - \lambda)^2] \quad (16)$$

$\Delta_{(k)}^{(1)} / \Delta_{(k)}$, $\Delta_{(k)}^{(2)} / \Delta_{(k)}$ に関する部分を Trace 理論を用いて表すと、

$$\alpha_k = \text{Trace} [(\mathbf{D}_{(k)}^{-1} \mathbf{D}_{(k)}^{(1)})] - \sum_{i=1}^N [1 / (\lambda_i^a - \lambda)] \quad (17)$$

$$\beta_k = \text{Trace} [(\mathbf{D}_{(k)}^{-1} \mathbf{D}_{(k)}^{(1)})^2 - \mathbf{D}_{(k)}^{-1} \mathbf{D}_{(k)}^{(2)}] + \sum_{i=1}^N [1 / (\lambda_i^a - \lambda)^2] \quad (18)$$

次に、2次以降の固有値の算定には Deflation 法を用いている。

また固有ベクトルの算定において、各法によって求められた λ_i を (1) 式に代入して $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{W}_b$ を求めこれを $\mathbf{F}$ として、(2) 式より変形 $\mathbf{W}_b$ が求められる。この $\mathbf{W}_b$ が λ_i に対応する $\mathbf{w}_i$ である。即ち

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_d(\lambda) \cdot \mathbf{F} \quad (23)$$

で、表せる。

表2 計算時間の比較 (SEC)

使用モード数による比較

METHOD	使用モード数	35	30	25	20	15	10	5
Laguerre's	1	307	250	197	163	128	106	85
	METHOD	3	663	546	414	309	234	170
Newton - Raphson's	1	330	270	211	166	133	106	85
	METHOD	3	817	610	458	338	247	175
Bailey's	1	325	259	204	166	134	110	88
	METHOD	3		602	444	328	245	183
Cauchy's	1		257	205	166	134	110	88
	METHOD	3		573	432	321	238	174

1 一部位材の断面積を変化させた場合 (修正比 $\lambda/\lambda_0=4/35$)

3 三部位材の断面積を変化させた場合 (修正比 $\lambda/\lambda_0=6/35$)

表3 最大誤差の比較 (%)

使用モード数による比較

METHOD	使用モード数	35	30	25	20	15	10	5
Laguerre's	1	0.000906	1.024406	1.101818	1.352141	1.353145	1.375258	1.560240
	METHOD	3	0.000929	0.640149	1.091311	1.918338	1.928769	2.321113
Newton - Raphson's	1	0.000906	1.024406	1.101818	1.352141	1.353145	1.375258	1.560240
	METHOD	3	0.000929	0.640149	1.091311	1.918338	1.928769	2.321113
Bailey's	1	0.000906	1.024406	1.101818	1.352141	1.353145	1.375258	1.560240
	METHOD	3		0.640149	1.091311	1.918338	1.928769	2.321113
Cauchy's	1		1.024406	1.101818	1.352141	1.353145	1.375258	1.560240
	METHOD	3		0.640149	1.091311	1.918338	1.928769	2.321113

<収束条件>

$$|(\lambda_{k+1} - \lambda_k) / \lambda_k| \leq c \quad \text{if } |\lambda_{k+1}| > c (=10^{-6})$$

$$|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \leq c \quad \text{if } |\lambda_{k+1}| \leq c (=10^{-6})$$

3) 数値計算

図1のような計算モデルを用いて、1. 9-12部材の断面積が System A の1.5 倍に増加し、質点9-12の質量が0.683 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ 増加した系を System B とし、3. 6-9-9-12-12-15部材の断面積が System A の1.5 倍に増加し、質点6-15の質量が1.366 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ 、質点9-12の質量が0.683 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ 増加した系を System B とした。

基本解となる System A, System B の固有値解析はQR法で行い、提案法の計算は単精度で行った。

その結果は、各法及び使用モード数を変化させた場合の時間及び精度 (提案法のQR法に対する最大誤差 (%)) の比較をそれぞれ表1, 表2, 表3に示してある。 ϵ は収束判定値である。ここで、計算に使用した電子計算機は富士通FM11-BSである。

4) あとがき

この論文で提案した解法について以上の計算結果より次のようなことがいえる。

1. 少ない反復回数で高精度の固有値が得られる。
2. 必要な個数の固有値を低次より順次求めることができる。
3. 時間・精度面からみて、Laguerre法が最も有効であると思われる。

今後の課題として、Müller 法を加え、さらに自由度を増し計算時間・精度の面で比較検討する必要があると思われる。

(参考文献)

- 1) Jaasbir, S. Arora: Survey of Structural Reanalysis Technique, Journal of the Structural Division, ASCE. No. ST4, Proc. Paper 12056, pp783~802, 1976-4
- 2) A. M. Ostrowski: Solution of Equations and Systems of Equations, Second Edition, Academic Press, 1966.
- 3) 片山拓朗他: 部分修正された振動系の振動数方程式の解法, 土木学会第41回年次学術講演会要集, S61.11