

2次元面内波動問題のBEM-FEM結合解析

熊本工業大学 正員 ○上杉 真平  
 熊本大学工学部 正員 大津 政康

1. はじめに

境界要素法 (BEM) は、地盤のような半無限領域の問題に対して有効である反面、不均質な領域には適用しにくいという欠点がある。そこで、本研究では、実際の複雑な地盤において、不均質な特性をもつ領域を有限要素法 (FEM) で、それを囲む均質とみなせる領域をBEMでモデル化し、両者の特徴を生かした結合解法の定式化を試みた。著者らは、これまで、面外問題についてその妥当性を検討してきた<sup>(1,2)</sup>。ここでは、さらに本手法を面内問題に適用し、その有用性を示す。

2. 結合法の定式化

対象とする領域が均質、等方かつ線形の弾性体であるとして平面ひずみ状態を考えると、2次元面内定常波動場の支配方程式は、次のNavierの式で表される。

$$(k_s^2/k_p^2 - 1)u_{\beta,\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta\beta} + k_s^2 u_{\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1)$$

ここに、 $k_s = \omega / c_s, k_p = \omega / c_p$  は、それぞれP波、SV波の波数である。このような2次元定常波動場の汎関数は、Fu-Washizuの定理<sup>3)</sup>より次のように表される。

$$\pi = 1/2 \int_V (mu_{\alpha,\alpha}u_{\beta,\beta} + u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha} + u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha} - k_s^2 u_{\alpha}^2) ds - \int_{C_1} g_{\alpha}(u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}) dc - \int_{C_2} u_{\alpha} \bar{g}_{\alpha} dc \quad (2)$$

$$u_{\alpha} = \bar{u}_{\alpha} \text{ on } C_1, \quad t_{\alpha} = \bar{t}_{\alpha} \text{ on } C_2$$

ここに、積分記号の添字Vは領域積分を意味し、また、 $C_1, C_2$  は、それぞれ変位境界および応力境界、 $m = \lambda / \mu, g_{\alpha} = 1 / \mu t_{\alpha}$  である。

このとき、FEM領域Aに対する汎関数  $\pi_f$  は、式 (2) より次のように与えられる。

$$\pi_f = 1/2 \int_A (mu_{\alpha,\alpha}u_{\beta,\beta} + u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha} + u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha} - k_s^2 u_{\alpha}^2) ds - \int_{C_2} u_{\alpha} \bar{g}_{\alpha} dc \quad (3)$$

FEM領域の各節点での値を  $u_{\alpha}^n$ 、内挿関数を  $N_n$  とし、各要素内の値が総和規約を用いて  $u_{\alpha} = N_n u_{\alpha}^n$  で表されるものとして式 (3) の変分をとり停留化すると次式を得る。

$$\int_A (mN_{i,\alpha}u_{\alpha,r} + N_{i,r}u_{r,\alpha} + N_{i,r}u_{\alpha,r} - k_s^2 N_i u_{\alpha}) ds - \int_{C_2} N_i \bar{g}_{\alpha} dc = 0 \quad (4)$$

これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$K_f u = F_f \quad , \quad F_f = \int N_i \bar{g}_{\alpha} dc \quad (5)$$

次に、BEM領域Dについても同様にして、その汎関数  $\pi_b$  は式 (2) にGaussの発散定理を用いることにより式 (6) のように得られる。

$$\pi_b = 1/2 \int_C u_{\alpha} g_{\alpha} dc - \int_{C_1} g_{\alpha}(u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}) dc - \int_{C_2} u_{\alpha} \bar{g}_{\alpha} dc \quad , \quad C = C_1 + C_2 \quad (6)$$

ここで、BEM領域を間接法によって定式化するものとする、波動場は、

$$u_{\alpha} = \int_C G_{\alpha\beta} f_{\beta} dc \quad , \quad t_{\alpha} = 1/2 f_{\alpha} + \int_C T_{\alpha\beta} f_{\beta} dc \quad (7)$$

と表される。ただし、Gは基本解、fは積分密度である。この式 (7) を  $u_{\alpha i} = C_{\alpha\beta ij} f_{\beta j}$  および  $g_{\alpha i} = D_{\alpha\beta ij} f_{\beta j}$  と離散化して式 (6) に代入し、その変分をとって停留化すると次式が得られる。

$$A_{\alpha\beta ij} f_{\beta j} + B_{\alpha\beta ij} \bar{u}_{\alpha j} - R_{\beta i} = 0 \quad (8)$$

$$B_{\alpha\beta ij}^t f_{\beta j} = 0 \quad (9)$$

ただし、

$$A_{\alpha\beta ij} = -1/4 \sum_p \{ (C_{\alpha\beta pi} + C_{\alpha\beta(p+i)}) D_{\alpha\beta pi} + (C_{\alpha\beta pi} + C_{\alpha\beta(p+i)}) D_{\alpha\beta pi} \} \Delta C_p$$

$$+ 1/4 \sum_q \{ (C_{\alpha\beta qi} + C_{\alpha\beta(q+i)}) D_{\alpha\beta qi} + (C_{\alpha\beta qi} + C_{\alpha\beta(q+i)}) D_{\alpha\beta qi} \} \Delta C_q$$

$$B_{\alpha\beta ij} = 1/2 \sum_p \{ D_{\alpha\beta pi} \Delta C_p + D_{\alpha\beta(p-1)i} \Delta C_{p-1} \}$$

$$R_{\beta i} = 1/2 \sum_p \{ C_{\alpha\beta pi} + C_{\alpha\beta(p+i)} \} \bar{g}_{\alpha} \Delta C_p$$

である。上式中、BはBの転置マトリックスを意味し、また、L、Mは、それぞれ境界  $C_1, C_2$  上の分割数である。式 (8)、(9) おいて積分密度 f を消去することにより、次のマトリックス表示式を得る。

$$K_b u_a = F_b, \quad k_b = -B^t A^t B, \quad F_b = B^t A^t R \quad (10)$$

FEM領域における式(5)とBEM領域の式(10)はまったく同形であるので、BEM領域を一要素として通常のFEMのプログラムに重ね合せると、

$$\begin{bmatrix} K_f & \\ & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f \\ u_{f'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ F_f + F_b \end{bmatrix} \quad (11)$$

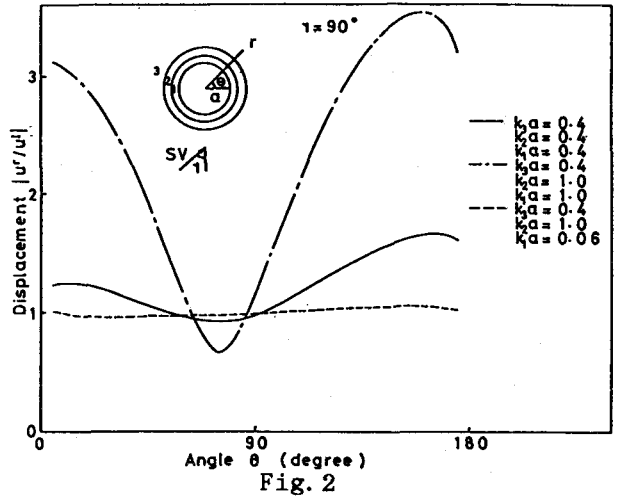
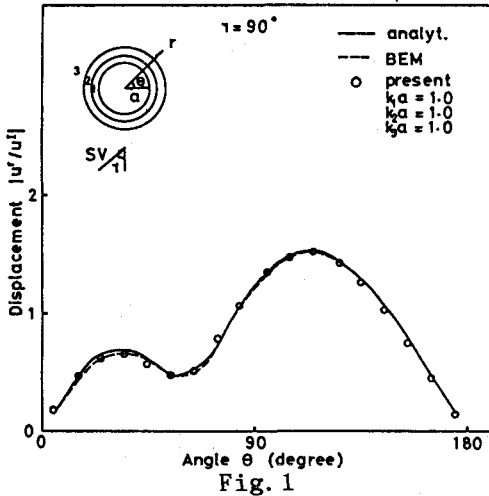
となる。従って、式(11)より散乱場の変位  $u_{f'}$  が求められると、全体場  $u_a$  は、自由場の変位  $u_a^0$  と  $u_{f'}$  の和として  $u_a = u_a^0 + u_{f'}$  のように得られる。また、半無限領域では、自由場は入射場  $u_a^i$  と反射場  $u_a^r$  の和として得られ、入射波として平面波を仮定すると次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_a^i &= \phi_{,\alpha}^i + e_{\alpha\beta} \psi_{,\beta}^i \\ u_a^r &= \phi_{,\alpha}^r + e_{\alpha\beta} \psi_{,\beta}^r \\ \phi^i &= \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma + x_2 k_p \cos \gamma)\} \\ \phi^r &= \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma + x_2 k_s \cos \gamma)\} \\ \psi^r &= K_p \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma - x_2 k_p \cos \gamma)\} \\ \psi^s &= K_s \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma - x_2 k_s \cos \gamma)\} \end{aligned}$$

ここに、 $\phi$ 、 $\psi$  は Lamé のポテンシャルであり、また、 $\gamma$  は入射角、 $K_p$ 、 $K_s$  は反射係数、 $e_{\alpha\beta}$  は permutation symbol である。

### 3. 数値解析例

まず、精度を検討するために、均質な場合について本解法の結果と解析解<sup>4)</sup>を比較した (Fig. 1)。 $\gamma = 90^\circ$  で SV 波が入射した場合であるが、よく一致していることがわかる。次に、不均質な場合の例として、コンクリートライニングが施されたトンネル周辺に開削の際に生じた緩み域がある場合について計算し、その結果を Fig. 2 に示す。これより、緩み域はトンネル壁面の地震応答を増幅し、コンクリートライニングはそれを抑制する効果のあることがわかる。



(参考文献) 1) 大津政康: 変分原理に基づいた結合解析, 境界要素法論文集, 第2巻, 1985. 2) 上杉真平, 大津政康: BEM-FEM結合法による半無限領域における面外波動場の解析, 第41回土木学会年講, 1986. 3) K. Washizu: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1975. 4) C.C. Mow and L.J. Mente: Dynamic stress and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves, Jour. Appl. Mech., No. 30, 1963.