土木学会西部支部研究発表会(1987.3)

複合境界を持つ矩形板の弾性座屈解析

長崎大学　正員　　崎山　毅
長崎大学　正員　○松田　浩

1．まえがき

四つの境界辺の中のいくつかが、部分的に異なる二種以上の支持条件で支持された、いわゆる複合境界を持つ矩形板の座屈解法の既往研究においては、相対する載荷二辺に関しては、単純支持が前提条件となっており、複合境界辺は非載荷辺に限定されているなど、解法の汎用性という観点からも、まだ、この種の問題には、検討の余地が残されているものと考えられる。本文は、複合境界を持つ矩形板に関して、弾性座屈の一解析法を提案し、この方法による数値解析結果に基づいて、各境界辺がそれぞれ一様な支持条件で支持された通常の矩形板との座屈特性の比較を行う。

本解析法は、非載荷辺のみならず、載荷辺をも含めた任意の辺に複合境界を持つ矩形板の座屈解析に応用できる、より一般的な解析法となっており、既往の解析法とは異なって、載荷辺の支持条件を特に限定する必要はない。また、矩形板の中央面内に作用する圧縮荷重に関しても一様分布を含めた任意の変分布荷重を取扱うことができる。

2．基礎微分方程式および離散的一般解

板面に垂直な横荷重 $q(x,y)$ を受け、また、板の中央面に、面内荷重 $N_x(y)$を受ける平板の曲げに関する基礎方程式は、断面力および変形の無次元量を導入して、Mindlin の平板曲げ理論に基づいて、次の偏微分方程式として与えられる。

$$\sum_{s=1}^{8} [F_{1ts}(\partial X_s/\partial \zeta) + F_{2ts}(\partial X_s/\partial \eta) + F_{3ts}X_s] + \delta_{1t}\bar{q} = 0 \qquad (1)$$

$$F_{111} = F_{123} = F_{134} = F_{146} = F_{167} = F_{188} = F_{278} = F_{377} = 1,$$

$$F_{225} = F_{233} = F_{257} = F_{266} = F_{386} = -F_{322} = -F_{331} = \mu,$$

$$F_{156} = \nu,\ F_{247} = \mu\nu,\ F_{344} = F_{355} = -I,\ F_{363} = -J,\ F_{372} = -K,$$

$$F_{381} = -\mu K,\ F_{212} = \mu(1-\lambda_x K),\ F_{217} = \mu\lambda_x,\ \text{other } F_{ijk} = 0,$$

ここに、Q_y,Q_x:せん断力,M_{xy}:ねじりモーメント,M_y,M_x:曲げモーメント,θ_y,θ_x:たわみ角,w:たわみ,E:弾性定数,G:せん断弾性定数,ν:ポアソン比,$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$:板剛度,h:板厚,$\kappa=5/6$:せん断修正係数

$$(X_1, X_2)=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}(Q_y, Q_x),\ (X_3, X_4, X_5)=\frac{a}{D_0(1-\nu^2)}(M_{xy}, M_y, M_x),\ (X_6, X_7)=(\theta_y, \theta_x),\ X_8=\frac{w}{a},\ x=a\eta,\ y=b\zeta,$$

δ_{ij} : Kronecker's delta, $\bar{q} = \mu q_0 a^3/[D(1-\nu^2)][q(x,y)/q_0]$, q_0 : 基準荷重強度,

$I = \mu(1-\nu^2)$, $J = 2\mu(1+\nu)$, $K = (h/a)^2E/(12\kappa G)$, $\lambda_x = a^2N_x/[D(1-\nu^2)]$

$\mu = b/a$, $t = 1,2,\cdots,8$　a, b:矩形板の横，縦の辺長,

式(1)の連立偏微分方程式の任意の離散点(i,j)における解析的近似解は次式となる。ここに、X_{rfo},X_{sog}は、積分定数であり、対辺の境界条件より決定される。詳細は、文献(3)を参照されたい。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}\left(\sum_{f=0}^{i} a_{1pijfd}\cdot X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j} a_{2pijgd}\cdot X_{s0g}\right)+q_{pij} \qquad (2)$$

3．数値解析

Fig.1 は、左右の載荷対辺が単純支持され、上下の対辺に単純支持と固定支持との複合境界を持つ、上

下および左右対称形の正方形板に関して座屈解析を行い、浜田ら[1] による解析解との比較を行ったものである。本例においては、対称性を利用して正方形板の4分の1部分に関する解析を行ったが、図中に示されるとおり、解析の対象となる平板領域をm＝6～10程度に分割することによりほぼ収束した実用性のある近似解を得ることができる。

次に、複合境界を持つ矩形板に関して、左右対辺に作用するx軸方向の等分布面内荷重Nx＝N による座屈の解析を行なった。なお、本論文においては、矩形板の座屈たわみモードを、便宜的に、x軸に平行な中央断面のたわみモードで表わすこととする。Fig.2は、左右の載荷辺と上辺が単純支持され、残りの下辺に固定支持と単純支持との複合境界を持つ矩形板の最小座屈固有値曲線と座屈たわみモードを示したものである。ⅠおよびⅤの、複合境界を持たない矩形板においては、辺長比a/bの変化に対して、座屈たわみモードは、この矩形板の左右対称性からsin関数的な半波形から1波形へと不連続的に変化し、対応する座屈固有値曲線は2本の異なる曲線で表わされ、その結果、とがった山形を形成することが知られている。これに対して、構造上の左右対称性を持たないII,III,IV の複合境界を持つ矩形板においては、座屈たわみモードは、辺長比a/b の変化に応じて連続的に変化し、最小座屈固有値曲線もなめらかな山形をもつ1本の連続的な曲線になることが明らかにされた。他の複合境界を持つ矩形板に対する解析結果は、OHPにて発表予定である。

4. 結語

偏微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、横荷重と面内荷重を受ける矩形板の挙動を支配する連立偏微分方程式の解析的近似解を求め、これに基づく、複合境界を持つ矩形板の座屈問題の一解析法を提示した。既往研究結果と本解析法に基づく数値解析結果との比較により、解析的近似解の収束性を検討し、また、本解析法の実用性を確認することができた。次に、複合境界を持つ矩形板と通常の一様な境界条件を持つ矩形板との座屈特性の比較などを行った。本法によれば、面内圧縮荷重や板厚、板剛度などが場所的に変化する場合についても、これらが一様な場合と同様に解析することができる。

参考文献

(1)浜田ほか:部分的固定の支持辺を持つ長方形板の圧縮座屈,機械学会論文集236号,1966、(2)Keer,L.M.,Stahl,B.:Eigenvalue Problems of Rectangular Plates with Mixed Edge Conditions,Jour.Appl.Mech.,Vol.39,1972,(3)崎山,松田：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、338号、1983

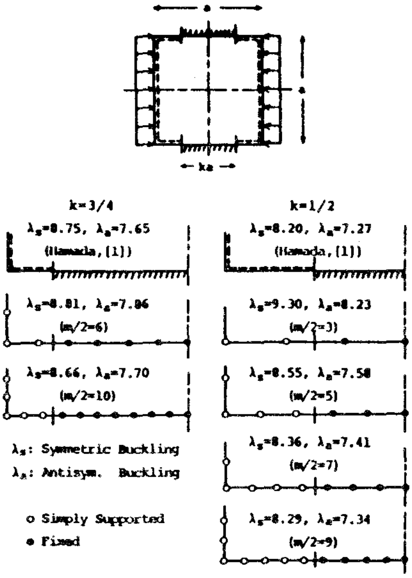

Fig.1 Convergency of the numerical solutions of the plate with mixed boundaries.

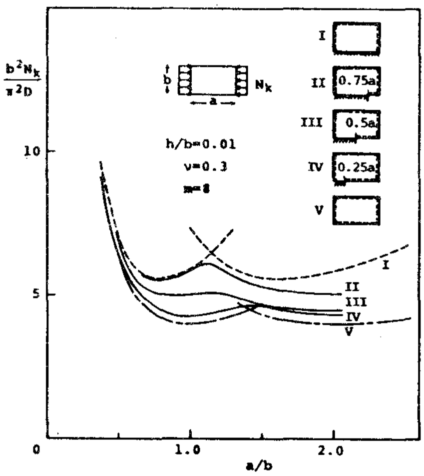

Fig.2(a) Buckling eigenvalues of the plate with mixed boundary.

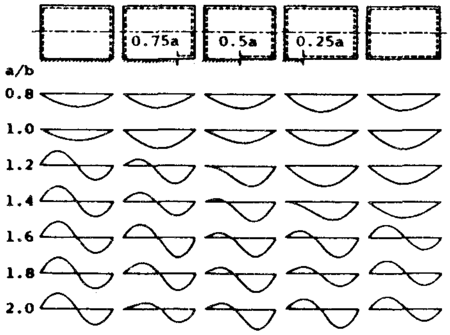

Fig.2(b)
Deflection modes along the horizontal center line.