有限要素法（FEM）における節点消去の一方法について

熊大［学］石原　元、八高専［正］内山義博、熊大［正］平井一男

〈序〉

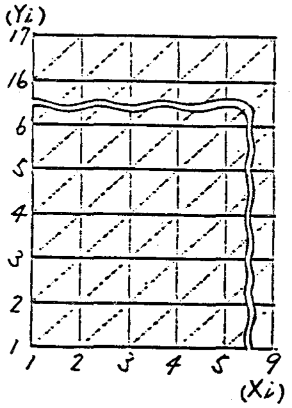
今、図－1のように一様な厚さ及び材質の長方形板のモデルを均等に分割する。このとき各節点における剛性マトリックスの要素には同じ様な値が並ぶ。そこである節点を消去し、周辺の節点に縮合した後にも同じ値が並ぶように節点消去を行えば、マトリックス計算の容量、時間等に対して好都合である。

〈方法〉

［A］今、中間節点を全て消去して、Y_1、Y_{17}行に縮合することを考える。このとき上記のことを満足するには、以下の手順で消去、縮合を行っていけばよい。

Step1――まず偶数行、つまりY_2行から1行おきに消去していく。縮合された奇数行 Y_1、Y_3、--- Y_{17}の各行（横の行）については全て異なった値が並ぶが、X_1、X_2、---X_9列（縦の列）に注目してみると、Y_1、Y_{17}行（上下端行）は除いて、各縦列ごとに同じ値が並ぶ。

Step2――以下同様に1行おきに消去していけば、Step1と同じ関係を保ちながらY_1、Y_{17}行に縮合できる。



図－1

すなわち1行おきに消去、縮合を繰り返していけば、上下端行を除いた内部行は、各X_i列に関して同じ要素が並ぶ。従って内部の任意の1行さえ求めればよいことになる。

［B］次にX_i列に関する下端行Y_1と内側の行（Y_3、Y_5、Y_7、---Y_{15}）との関係についてみてみる。

{1} Step1においてY_3行に関する剛性マトリックスをY_1行に関するそれで表す。

（a）節点19に関する要素について----Y_3行に関係してくるのはY_1、Y_3、Y_5行のみであるので、それぞれについて調べていくと以下のような結果が得られる。

Y_3行に関する要素：(19,19)=(1,1)+(9,9),(19,20)=(1,2)+(9,8),----(19,27)=(1,9)+(9,1)

Y_1行に関する要素：$(19,1)=(1,19)^T,(19,2)=(2,19)^T,----(19,9)=(9,19)^T$

Y_5行に関する要素：(19,37)=(1,19),(19,38)=(1,20),----(19,45)=(1,27)

但し(i,j)：節点iから節点jへの非主対角要素（　$)^T$は転置

以上のように節点19に関する要素は全てY_1行要素によって表せる。

（b）節点20に関する要素について----(1)と同様

Y_3行に関する要素：(20,19)=(2,1)+(8,9),(20,20)=(2,2)+(8,8),----(20,27)=(2,9)+(8,1)

Y_1行に関する要素：$(20,1)=(1,20)^T,(20,2)=(2,20)^T,----(20,9)=(9,20)^T$

Y_5行に関する要素：(20,37)=(2,19),(20,38)=(2,20),----(20,45)=(2,27)

以上のようにやはりY_1行によって表すことができる。

（c）以下節点23－27まで同じような関係となる。

以上のように、Y_3行に関する要素は全てY_1行に関する要素によって表される。また、Y_5、Y_7、---Y_{15}行はY_3行と同じであるから、結局Y_1行のみ記憶しておけばよい。

{2} Step2についても {1} と同様である。

〈理論〉

前記の方法をマトリックスで検討してみる。今、Y_1－Y_4に関する変位をそれぞれU_1－U_4、Y_5以下Y_{17}までに関する変位をU_5とする。これに応じてマトリックスも分割表示する。なお、簡単のため外力はないものとする。従って剛性方程式は式(1)のように表せる。初期状態ではY_1行はY_3行以降とは関係ないから

K_{13}－K_{15}は零である。同様にY_2、Y_3、Y_4、Y_{5-17}行についても無関係な行は零であるから、式(1)は式(2)のようなバンドマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

ここで式(2)を展開し、Y_2、Y_4行の消去、縮合、すなわちU_2、U_4を消去する。

$K_{11}U_1 + K_{12}U_2 = 0$ ----(3)

$K_{21}U_1 + K_{22}U_2 + K_{23}U_3 = 0$ ----(4)　式(4)より　$U_2 = -K_{22}^{-1}K_{21}U_1 - K_{22}^{-1}K_{23}U_3$---(8)

$K_{32}U_2 + K_{33}U_3 + K_{34}U_4 = 0$ ----(5)

$K_{43}U_3 + K_{44}U_4 + K_{45}U_5 = 0$ ----(6)　式(6)より　$U_4 = -K_{44}^{-1}K_{43}U_3 - K_{44}^{-1}K_{45}U_5$---(9)

$K_{54}U_4 + K_{55}U_5 = 0$ ----(7)

(8)、(9)を(3)、(5)、(7)に代入する。

$(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})\,U_1 - K_{12}K_{22}^{-1}K_{23}U_3 = 0$ ---(10)

$-K_{32}K_{22}^{-1}K_{21}U_1 + (K_{33} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23} - K_{34}K_{44}^{-1}K_{43})\,U_3 - K_{34}K_{44}^{-1}K_{45}U_5 = 0$ ---(11)

$-K_{54}K_{44}^{-1}K_{43}U_3 + (K_{55} - K_{54}K_{44}^{-1}K_{45})\,U_5 = 0$ ---(12)

(10)、(11)、(12)を再びマトリックス表示する。

$$\begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} & -K_{12}K_{22}^{-1}K_{23} & 0 \\ -K_{32}K_{22}^{-1}K_{21} & K_{33} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23} - K_{34}K_{44}^{-1}K_{43} & -K_{34}K_{44}^{-1}K_{45} \\ 0 & -K_{54}K_{44}^{-1}K_{43} & K_{55} - K_{54}K_{44}^{-1}K_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = 0$$

----(13)

{1} $K_{11} = K_{23}$、$K_{21} = K_{32}$、$K_{12}^{T} = K_{21}$、$K_{23}^{T} = K_{32}$より(2,1)要素は

$$-K_{32}K_{22}^{-1}K_{21} = -K_{21}K_{22}^{-1}K_{32} = -K_{12}^{T}K_{22}^{-1T}K_{23}^{T} = (-K_{12}K_{22}^{-1}K_{23})^{T}$$

となり、(1,2)要素の転置マトリックスとして表される。

{2} また、$K_{22}^{-1} = K_{44}^{-1}$、$K_{34} = K_{12}$、$K_{43} = K_{21}$より(2,2)要素は

$$K_{33} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23} - K_{34}K_{44}^{-1}K_{43} = (K_{33} - K_{11}) - K_{21}K_{22}^{-1}K_{12} + (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})$$

となる。この式の第3項は(1,1)要素である。

ところで（$K_{33} - K_{11}$）について考えてみる。K_{33}はY_3行の主対角マトリックスであり、この剛性マトリックスには、Y_2、Y_3、Y_4行が関係している。一方K_{11}にはY_1、Y_2行が関係している。このことより（$K_{33} - K_{11}$）はY_2行のみが関係しているY_3行の主対角マトリックスであり、（$K_{33} - K_{11}$）の19→27の並びはK_{11}での9→1の並び（K_{11}の逆並び）と同一である。同様にK_{12}とK_{21}は互いに逆並びであることから、$K_{21}K_{22}^{-1}K_{12}$は$K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$と逆並びであることもわかる。従って(2,2)要素はY_1行の1→9並びと9→1並びの和で表すことができる。

{3} $K_{45} = K_{12}$より(2,3)要素は

$$K_{34}K_{44}^{-1}K_{45} = K_{12}K_{22}^{-1}K_{12} = K_{12}K_{22}^{-1}K_{23}$$

となり、これは(1,2)要素と同じである。

以上のことより、Y_3行に関する各要素（式(13)の第2行要素）は全てY_1行に関する要素で表される。さらに、Ｓｔｅｐ２についても同様に説明できる。