ＳＰＬＩＮＥ曲線の数値計算

○学生員　香月　隆志
正会員　薄　慶治

１）序　任意の弾性棒が与えられた座標点で支持されて出来る曲線、すなわち、Spline曲線を考えてパソコンにより数値計算を試みた。弾性棒の大変形、すなわち、弾性曲線の計算については、すでに楕円関数を用いた解析が報告されている。ここでは曲線の曲率と棒の曲げモーメントの関係を表す弾性曲線の式を用いて直接に数値計算を行ってみた。

基本的には、全弾性曲線（図１-1）を隣合った変曲点間の基本形の　組み合わせと考えればよい。
変曲点A,B において点 Aでの接線及び法線を座標軸とした、大変形片持ばりとして取り扱える。

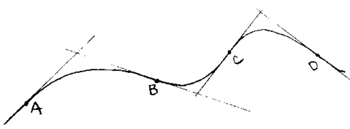


図１-1

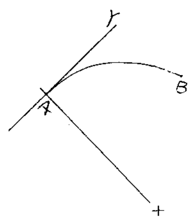


図１-2

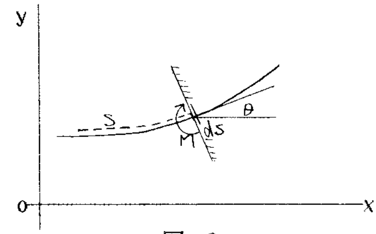
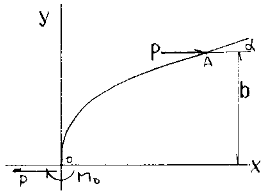
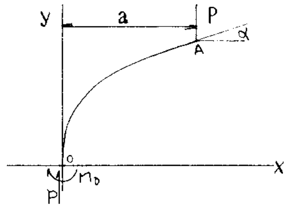
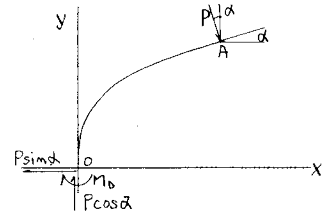


図　2

２）　計算式　　図 2において　$\frac{d\theta}{ds}=\frac{M}{EI}$　をｓで微分して　$\frac{d^2\theta}{ds^2}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{dM}{ds}$　----- (1)
また、$dx=ds\cos\theta$　，$dy=ds\sin\theta$　と書ける。
一方 $(\frac{d\theta}{ds})^2$をｓで微分し整理すると　$d(\frac{d\theta}{ds})^2=2\frac{d^2\theta}{ds^2}\cdot d\theta$　となり、両辺を形式的に積分すると
$(\frac{1}{\rho})^2=(\frac{d\theta}{ds})^2=2\int\frac{d^2\theta}{ds^2}d\theta+C$ ------(2)となる。式(２)の計算において、自由端の力の境界条件によって、$\frac{d^2\theta}{ds^2}$をθで簡単に積分できる様に力の作用方向を限定し、思考過程によりつぎの３つのケースについて計算を行った。

1	2	3
x軸に平行に力を作用させる	y軸に平行に力を作用させる	弾性棒に直角に力を作用させる
		
$M=M_0-Py$	$M=M_0-Px$	$M=M_0-Px\cos\alpha-Py\sin\alpha$
$\frac{dM}{ds}=-P\sin\theta$	$\frac{dM}{ds}=-P\cos\theta$	$\frac{dM}{ds}=-P\cos(\theta-\alpha)$
$(\frac{d\theta}{ds})^2=\frac{2P}{EI}(\cos\alpha-\cos\theta)$	$(\frac{d\theta}{ds})^2=\frac{EI}{2P}(\sin\theta-\sin\alpha)$	$(\frac{d\theta}{ds})^2=\frac{2P}{EI}\sin(\theta-\alpha)$
$s=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}}$	$s=-\sqrt{\frac{2P}{EI}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta-\sin\alpha}}$	$s=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta-\alpha)}}$
$x=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}}$	$x=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{\sin\theta-\sin\alpha}}$ $=2\sqrt{\frac{EI}{2P}}\sqrt{1-\sin\theta}$	$x=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{\sin(\theta-\alpha)}}$
$y=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}}$ $=2\sqrt{\frac{EI}{2P}}\sqrt{\cos\theta}$	$y=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{\sin\theta-\sin\alpha}}$	$y=-\sqrt{\frac{EI}{2P}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{\sin(\theta-\alpha)}}$

さらに、$K=2\sqrt{\frac{EI}{2P}}$とおき、媒介変数 t によってつぎのようになる。

$t=\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}$	$t=\sqrt{\sin\theta-\sin\alpha}$	$t=\sqrt{\sin(\alpha-\theta)}$
$s=L=K\cdot I_0$	$s=L=K\cdot I_0$	$s=L=K\cdot I_0$
$x=\cos\alpha\cdot L-K\cdot I_1$	$x=a=K\sqrt{1-\sin\alpha}$	$x=K(\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}-\sin\alpha\cdot I_1)$
$y=b=K\sqrt{\cos\alpha}$	$y=\sin\alpha\cdot L-K\cdot I_1$	$y=K(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}+\cos\alpha\cdot I_1)$
$I_0=\int_0^{\sqrt{\cos\alpha}}\{1-(t^2-\cos\alpha)^2\}^{-\frac{1}{2}}dt$	$I_0=\int_0^{\sqrt{\sin\alpha}}\{1-(t^2+\sin\alpha)^2\}^{-\frac{1}{2}}dt$	$I_0=\int_0^{\sqrt{\cos\alpha}}(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}dt$
$I_1=\int_0^{\sqrt{\cos\alpha}}t^2\{1-(t^2-\cos\alpha)^2\}^{-\frac{1}{2}}dt$	$I_1=\int_0^{\sqrt{\sin\alpha}}t^2\{1-(t^2+\sin\alpha)^2\}^{-\frac{1}{2}}dt$	$I_1=\int_0^{\sqrt{\cos\alpha}}t^2(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}dt$

3)　プログラムとフローチャート　　上記の関係であるように未知数はα，Kの２つである。既知値、すなわち、弧長L、と固定座標値x，又はyを入力し、I_0, I_1 の数値積分を利用しながらαとKの２元連立方程式を解く。

x軸に平行に力を作用させる場合$u=-\cos\alpha$，y軸に平行に力を作用させる場合$u=+\sin\alpha$，弾性棒に直角に力を作用させる場合$u=0$ と置くと全ての場合I_0の被積分関数は $\{1-(t^2+u)^2\}^{\frac{1}{2}}$ で表せる。

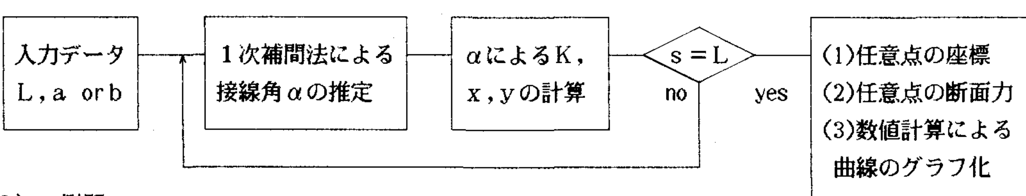
$-1<t^2+u<1$ が成立する時のMaclaurinの展開式は$\{1-(t^2+u)^2\}^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}(t^2+u)^{2n}$

$I_0=\int dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\int(t^2+u)^{2n}dt$　$I_1=\int t^2dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\int t^2(t^2+u)^{2n}dt$と書けるから項別積分を行うため $I_{0,n}=\int(t^2+u)^{2n}dt$　，$I_{2,n}=\int t^2(t^2+u)^{2n}dt$　とおいて漸化式を求めると

$I_{0,n}=\frac{1}{2\cdot2n+1}\left[t(t^2+u)^{2n}+\frac{2\cdot2n\cdot u}{2\cdot2n-1}\{t(t^2+u)^{2n-1}+2(2n-1)\cdot u\cdot I_{0,n-1}\}\right]$

$I_{2,n}=\frac{1}{2\cdot2n+3}\left[t^3(t^2+u)^{2n}+\frac{2\cdot2n\cdot u}{2\cdot2n+1}\{t^3(t^2+u)^{2n-1}+2(2n-1)\cdot u\cdot I_{2,n-1}\}\right]$　となりこれより数値積分 I_0，I_1のプログラムを作成する

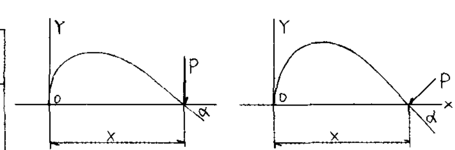
フローチャート



4)　例題

弧長L＝300mm，y座標＝0.0mm における計算結果

		x座標	接線角α
y軸に平行に力を作用させる場合	弾性棒の実測値	236.5	-40°15’
	計算値	237.02	-40°07’33
弾性棒に直角に力を作用させる場合	弾性棒の実測値	215.5	-51°30’
	計算値	214.93	-51°21’15



y軸に平行に力を作用させる場合　　弾性棒に直角に力をを作用させる場合

5) 結言　　一般に、Spline 曲線を計算するとき、曲げモーメント＝0、すなわち、曲率＝∞の点で分割して、それぞれの部分毎に、上記のようにパソコンにより数値計算を行うことができる。

片持ばりとしての弾性棒に力が作用する方向によって計算の仕方を分類したが　この計算過程での変数を考えた時　長さ、角度、力がありその中で我々が最も測定し易いもの、即ち入手し易い変数は長さである。汎用性から言えば　弧長Lと任意点の座標を入力し、プログラムの中で、弧長と座標から力の作用方向と接線角の関係を推定の数値計算が行えるような計算システムに変更していく必要があると考えている。