

接線剛性法による解の精度に及ぼす要素座標系の影響

佐賀大学 学生員 宮崎厚志

佐賀大学 正 員 後藤茂男

佐賀大学 正 員 井嶋克志

1. まえがき

既に、著者等の一人によって、要素変形と節点変位との適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性の定式化が行われ、これより導かれる接線幾何剛性係数は、要素合成に起因する接線剛性と完全に分離され節点変位を含まない、既知先行つりあい状態の要素力と要素形状のみの関数で表わされる単純明快なものであることが示された。

本研究は、この接線剛性法において、設定される分割要素の力学モデルによって解の精度が異なることに着目し、計算の効率化を計るための検討を行ったものである。即ち、有限要素構造物における既知つりあい状態から剛体変位後の要素変形において、剛体変位を拘束する仮想静定系として一端に固定された座標系を設定する場合と、両端単純支持の座標系を設定する場合とでは、接線幾何剛性係数が異なり、その結果、解の精度も異なってくる。従って、本研究は、まず骨組要素について2つの場合の接線幾何剛性係数を示すとともに、数値計算により解の精度の検討を行ったものである。

2. 接線剛性法

立体構造物の一構成要素について、先行つりあい状態での要素座標系に関する節点力ベクトルを U 、剛体変位を拘束する静定な支点条件より可動方向の独立な節点力からなる要素力ベクトルを S とする。

いま、先行要素座標系に関する節点力が ΔU 増加して節点変位 Δu が発生し支点条件に関する要素力が $S + \Delta S$ 、要素変形が Δs となり再び平衡状態になり、接線剛性方程式が

$$(K_0 + K_G) \delta u = K_T \cdot \delta u = \delta U \quad \text{----- (1)}$$

(K_0 :要素剛性マトリックス, K_G :接線幾何剛性マトリックス)

と表わされるものとすれば、 K_G は先行要素力が新たな変形によってなす仕事の変位による2回微分により求まる。即ち、変位ベクトルを、式(2)とおいた場合の K_G の i 行 j 列要素は式(3)になる。

$$\Delta u = [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \dots, \Delta u_n]^T \quad \text{----- (2)}$$

$$K_{Gij} = \partial^2 \Lambda / \partial \Delta u_i \cdot \partial \Delta u_j \quad \text{----- (3)}$$

ここに、 $\Lambda = \sum \Delta s_k \cdot S_k$ である。なお、全体構造系での接線剛性法における反復公式は反復回数を r とすると次のようになる。

$$\Delta u_{r+1} = \Delta u_r + K_T^{-1} (J_r, S_r) \cdot (U + \Delta U - J_r \cdot S_r) \quad (J: \text{座標変換マトリックス}) \quad \text{---- (4)}$$

3. 1 単純梁仮想静定系

先行状態での要素両端において、図-1のように先行要素座標系 ω 、節点変位に伴い回転する座標系を要素端座標系と呼び変形後の状態を ω_r' とする。両端 $r=i, j$ 点の ω 系に関する並進及び回転変位を ΔU_r 、 ΔX_r とすると、 ω_r から ω_r' への回転ベクトルは ΔX_r となるので

$$\omega_r' = \Phi(\Delta X_r) \cdot \omega \quad \text{----- (5)}$$

変形後の弦の ω 系、 ω_r' 系に関する方向余弦ベクトルを a, a_r とすると、

$$a = (u + \Delta u) / (1 + \Delta l) \equiv (L + \Delta u_j - \Delta u_i) / (1 + \Delta l) \quad (6)$$

$$= [1, 0, 0]^T, \quad 1: \text{弦長}, \quad \Delta l: \text{弦長変化量}$$

$$\Delta l = (u + \Delta u)^T (u + \Delta u) - 1 \quad \text{----- (7)}$$

$$a_r' = \Phi(\Delta X_r) a \quad \text{----- (8)}$$

(Φ : 回転による座標変換マトリックス)

$$\omega_r^* = \Psi(\alpha_r') \omega_r = \Psi(a_r') \Phi(\Delta X_r) \omega = T_r \omega \quad (9)$$

(Ψ : 平面回転による座標変換マトリックス)

$$\therefore \omega_j^* = T_j \omega = T_j T_i^{-1} \omega \quad \text{----- (10)}$$

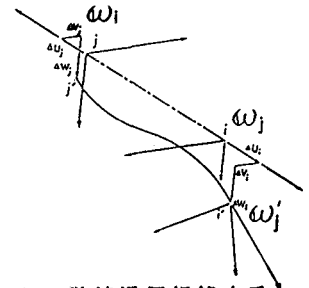


図-1 単純梁仮想静定系

が得られる。 ω_r^* は ω_r' の第1軸の軌跡が平面となって変形後の弦に一致するような座標変換により生じる座標系であり、変形後の弦の周りの回転マトリックスを Φ とすると

$$\omega_j^* = \Phi \omega_j' = \Phi \Phi^T \omega_j^* \quad \therefore \Phi \Phi^T = \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j^T \quad (11)$$

より ω_i^* , ω_j^* の平均として変形後の要素座標系 ω' が求まる。

以上より、 ω' から ω_i' , ω_j' への座標変換が変形後の要素力の算出に必要な回転変形ベクトル $\Delta \theta_i$, $\Delta \theta_j$ によるものとなり回転に関する厳密な適合条件は式(12)となる。

$$\Delta \theta_r = \Phi^{-1} \{ \Psi^T(\mathbf{a}_r') \Phi^T \} \quad (12)$$

即ち、要素変形増分と対応する先行要素力によるポテンシャルエネルギーは次式で与えられ、

$$\Lambda = \Delta \mathbf{1} \cdot \mathbf{N} + \Delta \theta_i^T \cdot \mathbf{M}_i + \Delta \theta_j^T \cdot \mathbf{M}_j \quad (\mathbf{N}: \text{先行軸力}, \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j: \text{先行要素端曲げモーメント}) \quad (13)$$

式(7), (12)より変位に関する2次までの展開式を求め、式(13)に代入し、式(2)(3)より K_{Gij} が得られ、これを表-1に示す。

3. 2 片持梁仮想静定系

図のように各座標系を設定する。変形前要素座標系から変形後要素座標系への移動変位ベクトルを $\Delta \mathbf{u}_r$, 回転変位ベクトルを $\Delta \mathbf{x}_r$, 剛体変位後の部材変形において移動変位ベクトルを $\Delta \mathbf{f}$, 回転変位ベクトルを $\Delta \theta$ とし、これに対応する先行状態の要素力を $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$ とすれば幾何学的適合条件より、

$$\Delta \mathbf{f} = \Phi(\Delta \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{u}_j - \Delta \mathbf{u}_i) - \mathbf{I} \quad (14)$$

また、回転軸ベクトル $\Delta \mathbf{x}_r$, 回転変位ベクトル $\Delta \theta$ に関しては

$$\omega_r^* = \Phi(\Delta \mathbf{x}_r) \omega_r', \quad \omega_r' = \Phi(\Delta \theta) \omega_r^* \quad (15)$$

がそれぞれ成立つ。従って、回転に関する厳密な適合条件式は

$$\Delta \theta = \Phi^{-1} \{ \Phi(\Delta \mathbf{x}_i) \Phi(\Delta \mathbf{x}_i)^T \} \quad (16)$$

ポテンシャルエネルギーは

$$\Lambda = \Delta \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{U} + \Delta \theta^T \cdot \mathbf{X} \quad (17)$$

3. 1と同様にして式(14)(16)(17)より K_{Gij} が得られ、これを表-2に示す。

4. 結論

立体構造物の2節点要素について、接線剛性法による解析を行ったが要素座標系の影響について、仮想静定系を単純梁としたほうが精度良く解が求まり、片持梁とした場合には変形後の要素座標系が自動的に定まり便利であるが2節点の相対有限変位挙動が均等でなくなるため精度が悪くなる。

なお、数値計算例については講演時に発表を行う。

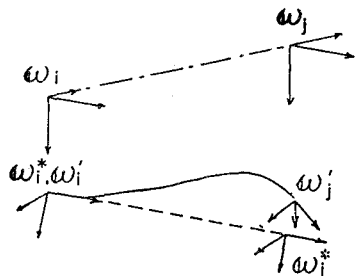


図-2 片持梁仮想静定系

表-1 単純梁仮想静定系の接線幾何剛性マトリックス

0	-V/l	-Vi/l	0	0	0	0	-V/l	Vi/l	0	0	0
N/l	0	Vi	T/2l	0	0	-V/l	N/l	0	Vi	T/2l	0
	N/l	-Vi	0	T/2l	0	Vi/l	0	-N/l	Vi	0	-T/2l
		0	-Mzi/4	Myi/4	0	0	Vi	Vi	0	Mzj/4	-Myi/4
			0	0	0	0	T/2l	0	Mzi/4	0	0
				0	0	0	0	-T/2l	-Myi/4	0	0
Sym.						0	-V/l	-Vi/l	0	0	0
						N/l	0	Vi	T/2l	0	0
						N/l	-Vi	0	T/2l	0	0
							0	-Mzj/4	Myi/4	0	0
								0	0	0	0

$$V = -(Mzi + Mzj)/l, \quad Vi = -Vj = (Myi - Mzj)/l, \quad Vi = (Mzj + 2Mzi)/4l, \quad Vj = (Mzi + 2Mzj)/4l, \\ Vi = (Myj - 3Myi)/4l, \quad Vj = (Myi - 3Myj)/4l$$

表-2 片持梁仮想静定系の接線幾何剛性マトリックス

0	0	0	0	-V	V	0	0	0	0	0	0
0	0	V	0	-N	0	0	0	0	0	0	0
0	-V	U	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	Vi/2	Vi/2	0	-W	V	0	0	0	0	0
		-Ui	0	W	0	-U	0	0	0	0	0
			-Ui	-V	U	0	0	0	0	0	0
Sym.				0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	0	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	0
						0	0	0	0	0	0

参考文献

- 1). 後藤, 羽根, 田中 土木学会論文報告集 No. 238, 1975,
- 2). 後藤茂男 土木学会論文報告集 No. 335, 1983,