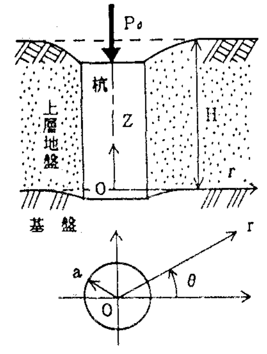
土木学会西部支部研究発表会(1987.3)

基盤の弾性変形を考慮した単杭の鉛直反力

九州大学　工学部　正員　小坪清真
九州工業大学　工学部　正員　○高西照彦
九州工業大学　工学部　正員　多田浩

1．まえがき　著者等は前論において[1]、鉛直荷重をうける杭基礎の挙動の理論的解析に際して、各杭の先端は堅固な基盤に支持されているという仮定を採用していた。しかし、基盤は常に剛であると考えることはできない。本論は図－1に示すように、基盤の弾性変形を考慮した場合に、杭頭に荷重を受ける単杭の挙動の理論的な解析法について考察を行ったものである。



図－1　単杭－地盤系

2．解析理論　(1)解析上の仮定　(a)地盤はそれぞれ一様な弾性定数を有する上層地盤と基盤とから成っている。(b)上層地盤における水平変位は鉛直変位に比べて小さい。(c)杭は鉛直で、円形断面を有する弾性体であり、下端は基盤に弾性支持されている。(2)上層地盤の変形曲線　上層地盤の変形曲線は、3次元弾性方程式を満足する解のうち、地表面の鉛直応力が0となる素解を採用し、これを重ね合わせることによって次式のように表される。

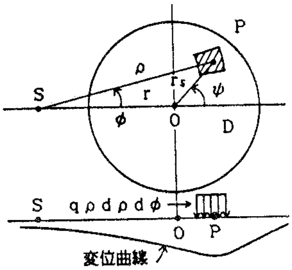
$W(r,z)=\Sigma^n A_n K_0(\xi_n r/a)\{\cos k_n z + \tan k_n H \sin k_n z\}$ -----(1)　ここに、

W：上層地盤の鉛直変位、A_n, k_n：未知定数、$K_0(\ )$：第2種第0次変形ベッセル関数、H：上層地盤の厚さ（＝杭長）、a：杭の半径、$\xi_n=\sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}\,k_n a$、$\nu$：上層地盤のポアソン比である。(3)杭周面に作用する摩擦力　杭の単位長さ当りに働く杭周面上の摩擦力は、μを上層地盤のせん断弾性定数とすれば $P(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\tau_{zr}|_{r=a}\,a\,d\theta=2\pi a\mu\ \ W/\ \ r|_{r=a}$ -----(2)　によって求めることができる。(4)杭の変形曲線　杭の弾性変形を支配する微分方程式は　$E_pA_p d^2\{\zeta(z)\}/dz^2 + P(z)=0$ -----(3)と表される。ここにζ：杭の鉛直変位、E_pA_p：杭の伸び剛性である。F, G, Y_{1n}, Y_{2n}を未知定数として上式の一般解を $\zeta(z)=F(z/H)+G+\Sigma^n\{Y_{1n}\cos k_n z+Y_{2n}\sin k_n z\}$ -----(4)とおいて、式(2)と共に式(3)に代入すれば $Y_{1n}=-2\pi\mu\xi_n K_1(\xi_n)/(E_pA_p k_n^2)A_n$, $Y_{2n}=Y_{1n}\tan k_n H$ -----(5) の関係式を得る。(5)杭と地盤との連続の条件　杭と地盤とは連続の条件を満足していなければならないから、式(1)と式(4)を等置して $W(a,z)=\zeta(z)$ -----(6)　(6)杭の軸力　杭の軸力は式(4)から $N(z)=E_pA_p d\zeta/dz$ -----(7) したがって、杭先端の軸力は $N_s=N(0)$ -----(8), 杭頭の軸力は $N_p=N(H)$ より求めることができる。N_pは杭頭荷重に等しくなければならないから $P=N_p=FE_pA_p/H$ -----(9) が得られる。(7)未知定数Gについて　式(4)に関連して、定数1およびz／Hを次式 $1=\Sigma^n a_n\{\cos k_n z+\tan k_n H\sin k_n z\}$, $z/H=\Sigma^n b_n\{\cos k_n z+\tan k_n H\sin k_n z\}$ -----(10)　に示すようにフーリエ級数に展開する。ここで、上式の右辺の関数がいずれも直交性を有するという条件を課せば、次式の関係式を得る。$k_n H\sin k_n H=C$（＝定数）-----(11) この関係式を用いればa_n, b_nが定められて $a_n=2\sin k_n H/(k_n H+\tan k_n H)$, $b_n=2(k_n H\sin k_n H+\cos k_n H-1)/k_n H/(k_n H+\tan k_n H)$ -----(12) となる。式(6)と式(10)を用いれば、A_nとGとの関係が得られて、$A_n=(a_n G+b_n F)/\{K_0(\xi_n)+\alpha_n\xi_n K_1(\xi_n)\}$ -----(13)。ここに、$\alpha_n=2\pi H^2\mu/\{E_pA_p\cdot(k_n H)^2\}$ -----(14)。　(8)円形剛板分布荷重による基盤の変形曲線　基盤上（z＝0）には(i)杭先端の沈下にもとずく荷重（円形剛板分布荷重とみなせる）(ii)上層地盤の変位にもとずく鉛直応力とせん断応力が働いている。本論では簡単のため、(i)による基盤面の変形のみを考える。さて、半無限の基盤上に円形剛板分布荷重 $q(r)=N_s/(2\pi a^2)\sqrt{1-(r/a)^2}$ -----(15)　が加わったときの円板の中心における沈下量は $s=\int_0^{2\pi}\int_0^a(1-\nu_s)q(r)r/(2\pi r\mu_s)drd\theta=(1-\nu_s)/(4a\mu_s)N_s$ -----(16)　となる。ここに、μ_s, ν_sは基盤のせん断弾性定数、ポアソン比である。一方、杭先端の沈下量は式(4)より$\zeta(0)$で与えられるから $s=\zeta(0)$ -----(17) が成立しなければならない。つぎに、基盤が式(15)で表される荷重q(r)をうけたときの、基盤面の鉛直変位

曲線を求めることを考える。いま、基盤面上の一点PにQなる集中荷重をうけたときの基盤上の任意点Sの鉛直変位は $\overline{W}_s=(1-\nu_s)/(2\pi\rho\mu_s)Q$ と表される。（ρは点Pと点Sとの間の距離）。したがって、荷重 $q(r)$をうけたときの基盤面の鉛直変位曲線は $W_s(r)=\int\int_D(1-\nu_s)/(2\pi\rho\mu_s)q(r_s)\rho d\rho d\phi$ -----(18) によって求められる。ここに、Dは円板領域を表し、r,ρ,r_s,ϕは図－２に示す通りである。式(18)の積分を実行すれば、結局次式が得られる。

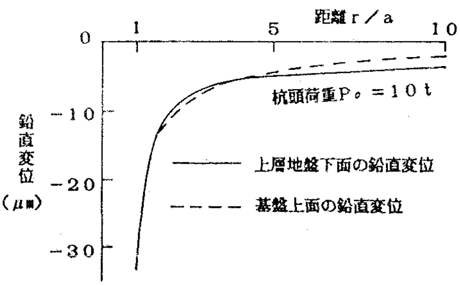
$$W_P(r)=\frac{(1-\nu_s)N_s}{2\pi r\mu_s}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\frac{a^2}{r^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)\frac{1}{5}\frac{a^4}{r^4}+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{7}\frac{a^6}{r^6}+\cdots\right\} \quad \text{----- (19)}$$

<ins>(9)上層地盤と基盤との連続の条件</ins>　上層地盤と基盤との間には変位の連続の条件が成立しなければならない。境界面における上層地盤の鉛直変位は、式(1)から $W(r,o)=\Sigma^n A_n K_o(\xi_n r/a)$ と書くことができる。一方、基盤面の変位は式(19)で表されるから、両式を等置することによって連続の条件式が得られる。 $W_P(r)=W(r,o)$ -----(20) <ins>(10)未知定数の決定</ins>　式(5),(6),(8),(11),(13),(17),(19)を用いれば未知定数A_n, k_n, Y_{1n}, Y_{2n}, F, G, Cの値は定められるはずである。しかし、k_nは超越方程式の解としてしか得られないので、これら未知定数の決定には必然的に繰り返し計算が必要になる。その手順は次の通りである。まず式(11)のCの値を仮定して、同式からk_nを定める。k_nが得られれば、他の未知定数は容易に決定することができる。このようにして求められた未知定数を用いて、いろいろのｒの値について式(20)の$W_P(r)$と$W(r,0)$とをそれぞれ算出し、両者の値がすべてのｒについて等しければ、このときのCの値が求める正解を与える。もしそうでなければ、改めてCの値を仮定し直して上記の計算を繰り返し行う。(8)において述べたように、本論では(8)の(ii)の条件を無視しているので、式(20)の条件式は近似的にしか満足されないことになる。すなわち、すべてのｒについては必ずしも式(20)は成立しない。



図－２

<ins>３．数値計算例および考察</ins>　２．で述べた理論に従って、以下に示すような諸元及び諸定数値を有する単杭－地盤系について数値計算を行った。上層地盤：せん断弾性定数μ=2000 t/m², ポアソン比ν=0.49, 上層地盤厚H=14.22 m, 基盤：せん断弾性定数μ_s=11172 t/m², ポアソン比ν_s=0.45, 杭：半径ａ=0.2032 m, 杭長H=14.22 m, 伸び剛性ＥＡ=207690 t, 杭頭荷重10 t。得られた結果を図－３に示す。図は基盤と上層地盤との境界面において、杭中心軸からの距離に対して、それぞれ上層地盤の鉛直変位（実線）と基盤の鉛直変位（点線）とがどのように変わるかを示したものである。このときの式(11)におけるCの値は1.2である。同図から杭の近傍においては上層地盤と基盤の鉛直変位とは比較的よく一致しているといえる。また、上層地盤と基盤との境界における鉛直変位は、杭の近傍でその変化が非常に大きく、杭から少し遠くなると（r/a>3）変位の変化は非常に小さくなることがわかる。ここでは示さなかったが、式(11)のCの値をC<1.2の範囲内で選んだ場合には、Cの値が小さいほど両地盤の境界面における鉛直変位については、上層地盤のそれの方がより大きくなる傾向がある。杭頭のばね定数を算出すると3.66×10⁴ t/m であった。なお、基盤を剛とした場合の杭頭ばね定数はは3.8×10⁴ t/mであった。



図－３　上層地盤下面と基盤上面の鉛直変位曲線

1)小坪清真・高西照彦・成富勝：脚付きケーソン基礎の群杭効率および荷重分担率、土木学会論文集、No.356, 1985.4.