

移動硬化則に基づく砂の弾塑性構成モデル

熊本大学工学部 正員 平井 弘 義
同上 学員 堤 隆

1. はじめに

砂の弾塑性挙動に関して、特に繰り返し載荷を受ける場合の構成則の定式化が近年きかんに研究されている。砂の力学挙動のモデル化においては、従来、等方硬化則に基づいた手法が数多く提案されてきている。しかしながら、繰り返し載荷の場合、等方硬化則は正確に実験事実と定量化しえない。そのため、境界面¹⁾ (Boundary or Bounding Surface) の導入により従来の降伏面の内側に塑性ひずみの発生を許容する理論が進展してきている。しかし、このような理論も基本的には等方硬化則に立脚した一般化と考えられる。一方、移動硬化則に基づくモデル化は Mroz²⁾ らによる研究があげられるが、かなりの複雑な定式化を伴っている。

砂の硬化状態は本来、等方硬化と移動硬化の組み合わせられた混合硬化によるものと考えられる。本研究³⁾ においては従来提案してきている等方硬化則と Ziegler の移動硬化則とを拡張したものを結び付けた砂の弾塑性構成モデルを提案する。さらにその有用性と実験事実との比較検討により明らかにする。

2. 破壊関数、塑性ポテンシャルおよび降伏関数

砂の力学挙動を定式化するために、破壊関数、塑性ポテンシャルをそれぞれ次式のように仮定する。

$$F = \sqrt{J_2} + \omega R(\theta) I_1 = 0 \quad (1)$$

$$g = \sqrt{J_2} / (R(\theta) I_1) - \eta \ln |I_1 / I_1^0| = 0 \quad (2)$$

ここに $J_2 = S_{ij} S_{ij} / 2$, $I_1 = \sigma_{kk}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} / 3 \delta_{ij}$, $J_3 = S_{ij} S_{jk} S_{ki} / 3$, $\cos 3\theta = -3\sqrt{3} J_3 / (2 J_2^{1.5})$, ω と η は材料定数, I_1^0 は硬化パラメータである。 $R(\theta)$ は次のように与えられる。⁴⁾

$$R(\theta) = U(\theta) / V(\theta) \quad (3)$$

$$U(\theta) = 2R_c(R_c^2 - R_t^2) \cos \theta + R_c(2R_c - R_t)[4(R_c^2 - R_t^2) \cos^2 \theta + 5R_c^2 - 4R_c R_t]^{1/2} \quad (4)$$

$$V(\theta) = 4(R_c^2 - R_t^2) \cos^2 \theta + (R_c - 2R_t)^2$$

ここに R_c と R_t は三軸圧縮と三軸伸張における $R(\theta)$ の値

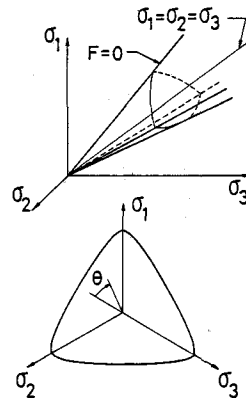


図1. 主応力空間および正八面体面における破壊関数

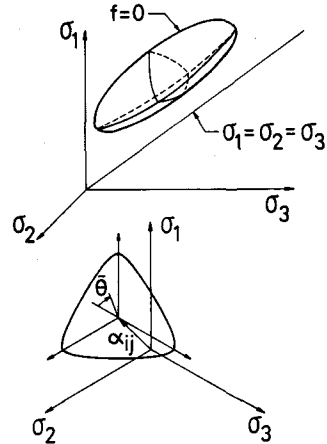


図2. 主応力空間および正八面体面における降伏関数

である。一方、降伏関数 f は応力空間の座標原点の移動量を表わすテンソル α_{ij} を用いて次のように書ける。

$$f = \bar{J}_2 / r(\bar{\theta})^2 + \beta \bar{I}_1^2 + k \bar{I}_1 = 0 \quad (5)$$

ここに $\bar{J}_2 = \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} / 2$, $\bar{I}_1 = \bar{\sigma}_{kk}$, $\bar{S}_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij}$, $\bar{S}_{ij} = S_{ij} - \alpha_{ij}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{kk} / 3 \delta_{ij}$, $\bar{J}_3 = \bar{S}_{ij} \bar{S}_{jk} \bar{S}_{ki} / 3$, $\cos 3\bar{\theta} = -3\sqrt{3} \bar{J}_3 / (2 \bar{J}_2^{1.5})$, β は材料定数, k は硬化パラメータである。 $r(\bar{\theta})$ は式(3)と類似な形で表わされる。図1、図2に F および f の形が示されている。

3. 硬化関数

硬化パラメータについては従来提案されている次式を用い、等方硬化を表わす。

$$\dot{k} = \phi (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)})^{1/3} + n s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \quad (6)$$

ここに ϕ , n は材料定数, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$ は塑性ひずみ速度である。一方移動テンソル d_{ij} については Ziegler 則に類似の次式を仮定する。

$$\dot{d}_{ij} = C (1 + \frac{\sqrt{J_2}}{\omega R(\theta) I_1}) \bar{s}_{ij} \sqrt{\dot{\epsilon}_{mn}^{(p)} \dot{\epsilon}_{mn}^{(p)}} \quad (7)$$

ここに C は材料定数である。

4. 適合条件と応力-ひずみ関係

Prager による適合条件式は次のように書ける。

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial d_{ij}} \dot{d}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (8)$$

また応力と塑性ひずみ速度の関係は次式による。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

ここに Λ はスカラー関数である。ゆえに式 (2), (5), (6), (7), (8), (9) を用いると構成式は求められる。

5. 繰り返し載荷における実験結果と数値解析

三軸圧縮・伸張繰り返し載荷における砂の応力-ひずみ関係について、図3に体積ひずみと応力比 q/p の関係を、図4に軸差ひずみと応力比 q/p の関係を示す。ここに $\theta = \sigma_1 - \sigma_2$, $p = (\sigma_1 + 2\sigma_2)/3$ である。図5には実験結果⁶⁾を示す。

体積ひずみについては $\eta_e = 0.6$ の方が、軸差ひずみについては $\eta_e = 0.7$ の方が実験値に近いことがわかる。 η_e は三軸伸張時の $\eta(\theta)$ の値である。図6は $\eta_e = 0.7$ について降伏曲面の原点移動と拡大の様子を示したものである。A から B は載荷時の移動・拡大を示し、B から C は弾性域、C から D は塑性状態となっている。

参考文献

- 1) Z. Mroz, 'On the description of anisotropic work-hardening', J. Mech. Phys. Solids, 15, 163-175(1967).
- 2) Z. Mroz, et. al., 'Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elastoplastic deformation of soils', Geotechnique, 29, 1-34(1979).
- 3) H. Ziegler, 'A modification of Prager's hardening rule', Quart. Appl. Math., 17, 55-65(1959).
- 4) K. J. Willam and Warnke E. P., 'Constitutive model for triaxial behavior of concrete', Seminar on Concrete Structures Subjected to Tri-axial Stresses, ISMES, Bergamo, Italy, 1974.
- 5) H. Hirai and M. Satake, 'Elastic-plastic constitutive models for the behavior of sand', Proc. of JSCE, 343, 255-265(1984).
- 6) F. Tatsuoka and K. Ishihara, 'Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction', Soils and Foundations, 14(3), 51-65(1974).

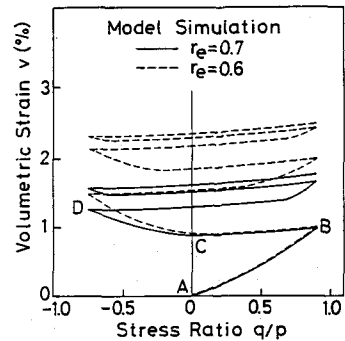


図3. 体積ひずみと応力比の関係

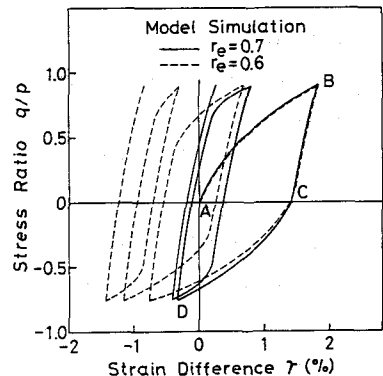


図4. 軸差ひずみと応力比の関係

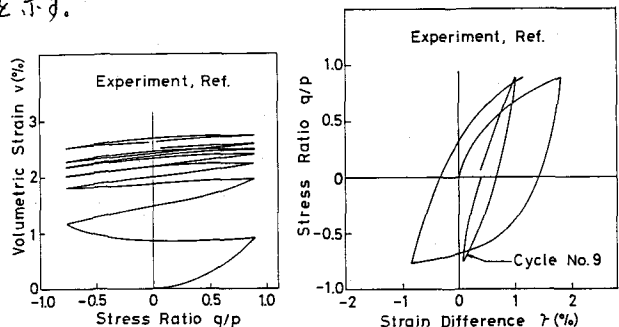


図5. 繰り返し載荷における応力-ひずみ関係(実験結果)

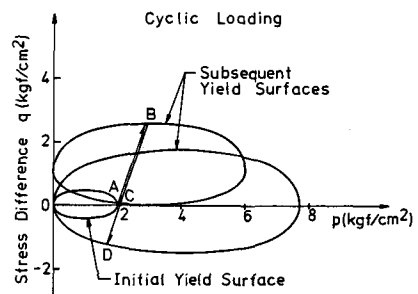


図6. 降伏曲面の移動・拡大