境界要素法による Biot 型圧密の新定式化

佐 賀 大 学　正 員 荒牧 軍治

1。まえがき

浸透問題と弾性問題の連成したＢiot 型圧密方程式を境界要素法を用いて解析する手段は２つに大別できる。１つは著者やＢanerjee, Suarez 等が用いている方法で、浸透問題と弾性問題における連成項を右辺の補正項として取り扱う方法で、ここでは不完全連成法と呼んでおく。この方法は理論的展開が簡単で数値解析上の手法が確立しているという利点があるものの、各時刻での計算ごとに連成項の領域積分を行なう必要があり、境界要素法の利点を十分には生かしきっていない。一方 Ｐredeleanuと西村は変位と間隙水圧の連成した境界要素法の定式化を与えている。Ｐredeleanu はＳtieltjes積分とＬaplace変換を用い、西村はＢiot 方程式の相反関係式とＦourier変換による基本解を用いて、領域積分の必要でない完全連成法を提案している。２次元平面問題では領域積分の簡易化、高速化を行なうことにより不完全連成法の欠点はある程度解消することができる。ところが３次元問題では領域のメッシュ分割それ自体が困難であり、領域積分が不要な完全連成法の方が有利である。

本研究は登坂がｕ、ｖ、ｐの連成したＮavier-Ｓtokes 方程式に対する積分方程式及び基本解を求める際に提案した手法をＢiot 型圧密式に適用し、完全連成型の積分方程式及び基本解を求めたものである。本手法は積分方程式と基本解の統一的なマトリックス表現で表わされるため、種々の連成問題に適用が可能であり、今後境界要素法定式化の標準的な手法となるであろう。ここでは簡単のため２次元問題についてのみ述べるが、３次元問題においても基本的考え方は同じである。

２。Ｂiot 型圧密方程式の積分方程式

２次元平面問題のＢiot 型圧密方程式は次式で与えられる。

$$\left[\begin{array}{cc|c} (\lambda+2\mu)D_1^2+\mu D_2^2 & (\lambda+\mu)D_1D_2 & D_1 \\ (\lambda+\mu)D_1D_2 & (\lambda+2\mu)D_2^2+\mu D_1^2 & D_2 \\ \hline D_tD_1 & D_tD_2 & \frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta \end{array}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$\boxed{L_{JK}u_k=B_J} \tag{2}$$

上式において　u_1, u_2 : x_1, x_2 方向の変位、ｖ：過剰間隙水圧、λ, μ : Ｌameの定数、κ：透水性を示す定数、$\bar{\mu}$：水の動粘性係数である。上式においてＤ$_1$、Ｄ$_2$、Ｄ$_t$はそれぞれｘ$_1$、ｘ$_2$、ｔに関する微分演算子を、ΔはＬaplace演算子を示す。

上式に重み関数V^*_{JL}をかけ領域全体で積分した重み付き残差式は次式で与えられる。

$$\int_\Omega (L_{JK}u_K-B_J)V^*_{JL}d\Omega=0 \tag{3}$$

上式に発散定理及び部分積分を用いて整理すると、次のような逆形式の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\int_t\int_\Omega u_kL^*_{KJ}V^*_{JL}d\Omega dt=&\int_t\int_\Gamma(u_J\Sigma^*_{JL}-p_JV^*_{JL})d\Gamma dt\\&+\int_t\int_\Gamma(u_1n_1+u_2n_2)\dot{V}^*_{3L}d\Gamma dt-\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)V^*_{3L}\right]_{t_0}d\Omega\end{aligned} \tag{4}$$

$$
L^*_{KJ} = \left[\begin{array}{cc|c}
(\lambda+2\mu)D_1^2+\mu D_2^2 & (\lambda+\mu)D_1D_2 & D_tD_1 \\
(\lambda+\mu)D_1D_2 & (\lambda+2\mu)D_2^2+\mu D_1^2 & D_tD_2 \\
\hline
-D_1 & -D_2 & \frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta
\end{array}\right] \tag{5}
$$

上式においてΣ^*_{JL}は擬似表面力であり、弾性問題における表面力と浸透問題における流束を含んでいる。また右辺第３項の領域積分は初期時刻t_0における体積ひずみに関するものである。載荷初期における体積ひずみが０であることを考慮すると右辺第３項は消去できる。

基本解V^*_{JL}として次式を満たす基本解テンソルを用いる。

$$
L^*_{KJ}V^*_{JL} = \delta_{KL}\,\delta(x-\xi)\,\delta(\tau-t) \tag{6}
$$

デルタ関数の性質より左辺の領域積分はξ点の変位のみで表わされるので、境界積分のみを有する積分方程式が得られる。

$$
u_L(\xi) = \int_t\int_\Gamma (u_J\Sigma^*_{JL} - p_JV^*_{JL})\,d\Gamma + \int_t\int_\Gamma (u_1n_1^* - u_2n_2^*)\,\dot{V}^*_{3L}\,dt\,d\Gamma \tag{7}
$$

３。基本解

式（６）を満たす基本解V^*_{JL}はHörmanderの方法を用いて以下のように求めることができる。演算子マトリックスL_{KJ}との間に次の関係を持つ演算子マトリックスM_{JL}を定義する。

$$
L^*_{KJ}M_{JL} = L\,\delta_{KJ} \qquad L：演算子マトリックスL^*_{KJ}の行列式
$$

$$
L = \mu(\lambda+2\mu)\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta\Delta\Delta + \mu D_t\,\Delta\Delta \tag{8}
$$

基本解テンソルV^*_{JL}を$M_{JL}\phi^*$（ϕ^*：基本解ポテンシャル）で表わすとϕ^*は次の式を満たす解である。

$$
L^*_{KJ}V^*_{JL} = L^*_{KJ}M_{JL}\phi^* = L\,\delta_{KL}\phi^* = \delta_{KL}\,\delta(x-\xi)\,\delta(\tau-t) \tag{9}
$$

$$
\left\{\mu(\lambda+2\mu)\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta\Delta\Delta + \mu D_t\Delta\Delta\right\}\phi^* = \delta(x-\xi)\,\delta(\tau-t) \tag{10}
$$

演算子マトリックスM_{JL}は次式で与えられる。

$$
M_{JL} = \left[\begin{array}{cc|c}
\left\{(\lambda+2\mu)D_2^2+\mu D_1^2\right\}\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta + D_tD_2^2 & -\left\{(\lambda+\mu)\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta + D_t\right\}D_1D_2 & -\mu D_tD_1\Delta \\
-\left\{(\lambda+\mu)\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta + D_t\right\}D_1D_2 & \left\{(\lambda+2\mu)D_1^2+\mu D_2^2\right\}\frac{\kappa}{\bar{\mu}}\Delta + D_tD_1^2 & -\mu D_tD_2\Delta \\
\hline
\mu D_1\Delta & \mu D_2\Delta & \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta
\end{array}\right] \tag{11}
$$

式（10）を満たす基本解ϕ^*は次のように与えられる。

$$
\phi^* = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{r^2}{8\pi}+\alpha\right)E_i\left(-\frac{r^2}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{16\mu\pi}\left(e^{-\frac{r^2}{\alpha}}-1\right) - \alpha\ln r \tag{12}
$$

ただし　$\alpha = 4\Lambda(\tau-t)$　，　$\Lambda = (\lambda+2\mu)\kappa/\bar{\mu}$，　E_i：積分指数関数

式（11）で得られたポテンシャルϕ^*に対して演算子マトリックスM_{JL}の操作をほどこせば基本解テンソルV^*_{JL}を求めることができる。

４。結語

弾性問題と浸透問題の連成したBiot型圧密方程式に対して、積分方程式が境界のみで与えられることを示し、その基本解をHörmanderの方法によって求めた。