# 非線型移流項の数値計算について

九州大学工学部　正　小松利光
九州大学大学院　学○大串浩一郎，学　仲敷憲和

**1. まえがき**　　平均流による物理量の輸送、即ち移流は、実際の水理学的問題において重要な役割を果たすことが多い。河川や湖沼における輸送問題や、開水路の非定常問題において、質量もしくは運動量の保存式は移流項を含む。それらの移流項は正確に評価されなければならないにもかかわらず、その数値的取り扱いは非常に困難である。Holly と Preissmann(1977)[1] は、2-point fourth-orderのスキームを提案し、線型の移流の計算に関して飛躍的に改善された結果を得ただけでなく、非線型の運動量の移流方程式に対しても有用であることを示唆した。Hollyと小松(1984)[2] は、線型の移流方程式の計算に関して、精度や計算の容易さの点でH-P法の短所を十分補った、8-point method を提案し、二次元問題適用への可能性を示した。その後、小松, Holly, 仲敷(1984)[3] は、8-point methodを更に改良して6-point method を提案し、より少ない計算で精度良く移流の計算ができることを示した。本論文では、非線型の移流拡散方程式の数値計算において、どの程度6-point methodが実用的であるかを報告している。

**2. 線型の移流拡散方程式**　　ここで用いる方程式は、次式で示されるスカラー量$u$の移流と拡散に関する一次元のBurgers方程式である。

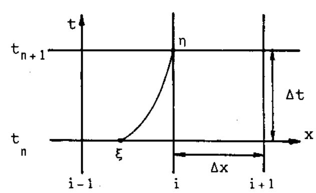
$$u_t + \mu \cdot u_x = \nu u_{xx} \quad . \tag{1}$$

ここで、添字$t$と$x$は各々時間と空間に関する偏微分を示し、$\nu$は拡散係数、$\mu$は流速を表わす。もし、$\mu = a$（$a$は既知の速度）なら、(1)式は物理量$u$の線型移流拡散方程式になる。(1)式の特性曲線表示は、

$$\frac{dx}{dt} = \mu \text{ 上で } \frac{du}{dt} = \nu u_{xx} \tag{2}$$

となる。図−1の計算格子上で$u$の諸量を差分化した形は次のようになる。

$$\frac{u_n - u_\xi}{\Delta t} = \nu\left[\theta\delta_n^2 + (1-\theta)\delta_\xi^2\right] . \tag{3}$$



図−1　一次元問題の計算格子

ここで、$\theta$は$0 \leqq \theta \leqq 1$の重み、$\delta^2$は特性曲線の始点$\xi$もしくは終点$\eta$における$u_{xx}$の値であり、次のようにCrank-Nicholson タイプで近似される。

$$\delta_n^2 = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) , \quad \delta_\xi^2 = \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) \tag{4}$$

*6-point method*において、$u_\xi$ の値は、次式で示されるような既知量$u_{i-3}^n$, $u_{i-2}^n$, $u_{i-1}^n$, $u_i^n$, $u_{i+1}^n$, $u_{i+2}^n$に基づいた三次の補間多項式を用いることにより求められる。

$$u_\xi = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 . \tag{5}$$

ここで、$\alpha \equiv (x-\xi)/\Delta x$ 、$a_0 \sim a_3$は6-point methodにおける係数で、$u_{i-3}^n \sim u_{i+2}^n$の値によって決定される。

**3. 非線型の移流拡散方程式**　　非線型の場合は、$\mu = u(x,t)$となる。従って、点$\xi$の位置は$u$の解と独立には決定できなくなり、線型の場合に比べてスキームが複雑になる。特性曲線上の二点$\eta$, $\xi$における$u$の値と$\alpha$の関係は次のようになる。

$$\alpha(\Delta x/\Delta t) = \phi u_n + (1-\phi)u_\xi \quad . \tag{6}$$

ここで、$\phi$は$0 \leqq \phi \leqq 1$の重みである。もし、(6)式において$u_\xi$ の値を求めるために*6-point method*を用いるならば、線型の場合にはなかった$\alpha$の決定という困難な計算が必要になる。従って、$\alpha$の決定に際し、本論文では以下の手順が用いられた。

まず、(6)式における$u_\eta$ の第一近似解を求める。(6)式において$\phi = 0$とおき、$\alpha$の三次方程式を解いて実数解$\alpha^{(1)}$が求まる。ここで、添字(1)は第一近似を意味する。もし、$\alpha^{(1)}$ が$0 \leqq \alpha^{(1)} \leqq 1$を満足しないならば、(5)式に

おける差分の格子を上流方向もしくは下流方向へ$\Delta x$だけずらしてスキームを組めばよい。そのような操作を行って得られた$\alpha^{(1)}$を(5)式に代入して$u_\xi^{(1)}$が得られる。次に(3)式において$\theta=0$とすれば$u_\eta^{(1)}$が求まる。得られた$u_\eta^{(1)}$を(6)式に代入すると$\alpha$の第二近似解$\alpha^{(2)}$が求まり、同じ手順で(5)式と(3)式より$u_\xi$と$u_\eta$が得られる。

## 4. 非線型の移流拡散の適用例

以上の方法を用いて、6-point methodを非線型の移流拡散に適用した。最初に、次のような厳密解をもつ移流拡散を考える(Donea, 1984)[4]。

$$u(x,t) = \frac{x/t}{1+\exp(x^2/4\nu t)(t/t_0)^{1/2}}, \tag{7}$$

初期条件は、

$$u(x,1) = \frac{x}{1+t_0^{-1/2}\exp(x^2/4\nu)}. \tag{8}$$

ここで、$t_0=\exp(1/8\nu)$である。図-2は$\nu=0.0005$, $\Delta t=\Delta x=0.01$に対する計算結果を示している。$\theta$と$\phi$を適当に選ぶことにより、H-P法と同様に厳密解とほぼ一致した計算解を得ることができる。次に非線型の純粋な移流、即ち$\nu=0$の場合に対して6-point methodを適用した。水平で一定断面の摩擦のない開水路を前進する急峻な波動を考える。即ち初期条件として、

$$u(x,0) = \begin{cases} 1\ (\mathrm{m/s})\ (x \leqq x_1) \\ 0\ (\mathrm{m/s})\ (x > x_1) \end{cases}, \tag{9}$$

上流側の境界条件として、

$$u(0,t) = 1\ (\mathrm{m/s})\ (t \geqq 0) \tag{10}$$

を与える。ここで、$x_1=2\Delta x$ ($\Delta x=200$ (m))である。図-3に$\Delta t/\Delta x=1$のときの計算結果を示す。

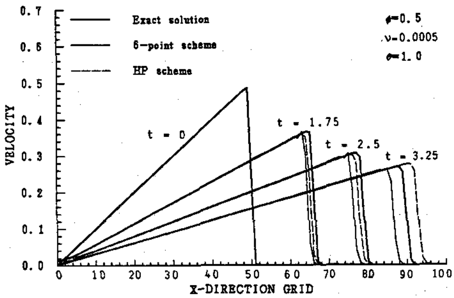



図-2 Burgers方程式の厳密解と計算解

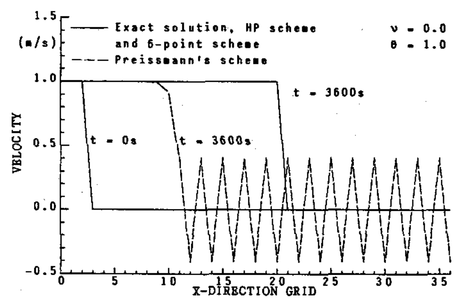



図-3 純粋な移流に対する厳密解と計算解

Preissmannの差分式は、先端部で振動しているのに対し、H-P法及び6-point methodは、厳密解と良く一致していることがわかる。しかしながら、$\Delta t/\Delta x \leqq 0.9727$に対しては、先端部における唯一許される実数解は、$\alpha=0$であり、先端部の前進が完全に妨げられる。

## 5. 結論

本論文では、一次元のBurgers方程式をモデルとして、線型及び非線型の移流拡散を考察した。線型の移流拡散と同様に非線型な問題に対しても、6-point methodを拡張できることがわかった。しかし、非線型の場合、$\alpha$の決定のために三次方程式を解かなければならず、その結果$0 \leqq \alpha \leqq 1$を満たす実数解$\alpha$が必ず存在するとは限らず、まだ困難な問題が残る。また、非線型の純粋な移流の場合も、$\Delta t/\Delta x$の値によっては$\alpha=0$しか実数解が求まらない場合があり、より広範囲な$\Delta t/\Delta x$の値に対して計算可能な方法の開発が望まれる。

## 6. 参考文献

1) Holly, F.M.Jr. and A. Preissmann: Accurate Calculation of Two-Dimensional Advection, JHYD, ASCE, Vol.98, No.HY11, pp.1259-1277, 1977.
2) 小松利光, F.M. Holly Jr.：河川や沿岸部における物質拡散の数値計算法, 第28回水理講演会論文集, 1984.
3) Komatsu, T., F.M.Holly Jr. and N. Nakashiki: Numerical Calculation of Pollutant Transport in Rivers and Coastlines, Proceedings of 4th Congress of APD, IAHR, Chiangmai, Thailand, 1984.
4) Donea, J.: A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems, Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Proceedings of 3rd International Conference, Seattle, 811, pp.941-950, 1983.
5) Holly, F.M.Jr. and K. Toda: Hybrid Numerical Schemes for Linear and Nonlinear Advection, Proceedings of 21st Conference of IAHR, Melbourne, 1985.
6) Komatsu, T., F.M.Holly Jr., N. Nakashiki and K. Ohgushi: Numerical Calculation of Pollutant Transport in One and Two Dimensions, Journal of Hydroscience and Hyraulic Engineering, Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985.