

不規則境界をもつ二次元重み付差分法

九州産業大学 正員○加納正道 九州産業大学 正員 赤坂順三
東 和 大学 正員 空閑幸雄 九州産業大学 川村英博

1. まえがき 前報¹⁾において、不規則境界をもつ二次元領域を我々の提案したADI法的重み付差分式により比較的粗い差分格子で高精度の解が得られることを示した。但し、ADI法的解法においては、x, y方向の流速が異なる場合には精度よく解析できる範囲は狭くなる。そこで、本報では不規則境界をもつ領域に対応できる二次元重み付差分法を提案し、その解析結果の一部を示している。

2. 不規則境界をもつ二次元重み付差分法 図1に示す不規則格子からなる領域に対応する移流拡散式の二次元重み付差分法を次のようにして定める。基礎式(1)を満足する多項式群は式(2)で示される。いま、式(1)において原点を任意の点に移し、差分格子間隔を、 $\Delta x = G_1 h$, $\Delta y = G_2 h$, $\Delta t = k = R h^2$ とし、原点のごく近くを考えて、x, y, tを式(4)と表す(G_1, G_2, R は正定数)。さらに、流速と拡散係数の無次元化を式(5)のようにすれば式(3)は式(6)と記せる。次に、図2, 3の差分モデルで示す重み付差分式は式(7), (8)で表され、同式中の係数即ち各点の重みP, Sは連立方程式(9), (10)を解いて決定できる。

3. 本重み付差分法の精度 図1の対象領域の二次元重み付差分法による解を、厳密解式(11)と比較して、その精度を検討する。精度の評価は厳密解との相対誤差 ϵ が格子間隔の4乗(Δs^4)以下となる F_* と μ_* の範囲を斜線部分で示して行う。図4は、二次元重み付差分法を解くにあたり、四周辺の境界条件を取りいれるため、時間間隔 Δt ごとに図2, 3に示す差分

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - v_1 \frac{\partial c}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c}{\partial y} \quad (1)$$

モデルを交互に使用した結果である。これによれば、二次元重み付差分法ではADI法とは異なり、x, y方向の流速比がどんなに異

$$c^{(r)}(x, y, t) = \sum_{i=0}^{r/2} \left\{ \frac{(x - v_1 t + y - v_2 t)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(d_1 t + d_2 t)^i}{i!} \right\} \quad (2)$$

った場合でも $\epsilon \leq \Delta s^4$ を満足する範囲は全く変らない。また、図

$$c(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ a_r \sum_{i=0}^{r/2} \left\{ \frac{(x - v_1 t + y - v_2 t)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(d_1 t + d_2 t)^i}{i!} \right\} \right\} \quad (3)$$

5は、一次元重み付差分法と比較するために、文献2)から一次元

$$x = p_1 G_1 h, y = p_2 G_2 h, t = q R h^2 (p_1, p_2, q: 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

中央差分型の $F_x - \mu_x$ 図を掲げたものである。図4, 5の比較から、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= v_1 k / G_1 h = v_1 R h / G_1, & F_y &= v_2 k / G_2 h = v_2 R h / G_2 \\ \mu_x &= d_1 k / (G_1 h)^2 = d_1 R / G_1^2, & \mu_y &= d_2 k / (G_2 h)^2 = d_2 R / G_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

不規則境界をもつ二次元中央型重み付差分法にお

いては、一次元重み付差分法

$$c^{(r)}(p_1 G_1 h, p_2 G_2 h, q R h^2) = h^r \sum_{i=0}^{r/2} \left\{ \frac{\{G_1 p_1 + G_2 p_2 - q(G_1 F_x + G_2 F_y)\}^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{\{q(G_1^2 \mu_x + G_2^2 \mu_y)\}^i}{i!} \right\} \quad (6)$$

$c(i, g, j) = P_{0,-1}^0 c(i, g-1, j) + P_{0,1}^0 c(i, g+1, j) + P_{0,-1}^{-1} c(i, g-1, j-1) + P_{0,0}^{-1} c(i, g, j-1) + P_{0,1}^{-1} c(i, g+1, j-1)$ (7)

$c(i, g, j) = S_{-1,0}^0 c(i-1, g, j) + S_{1,0}^0 c(i+1, g, j) + S_{-1,0}^{-1} c(i-1, g, j-1) + S_{0,0}^{-1} c(i, g, j-1) + S_{1,0}^{-1} c(i+1, g, j-1)$ (8)

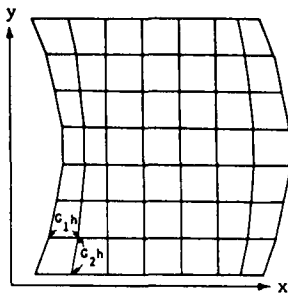


Fig.1 analysis field

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 \\ -G_2 & G_2 & F_* - G_2 & & & F_* & F_* + G_2 \\ G_2^2 & G_2^2 & (F_* - G_2)^2 - 2\mu_* & & & F_*^2 - 2\mu_* & (F_* + G_2)^2 - 2\mu_* \\ & & (F_* - G_2)^3 & & & F_*^3 & (F_* + G_2)^3 \\ -G_2^3 & G_2^3 & -6(F_* - G_2)\mu_* & & & -6F_*\mu_* & -6(F_* + G_2)\mu_* \\ & & (F_* - G_2)^4 & & & F_*^4 & (F_* + G_2)^4 \\ G_2^4 & G_2^4 & -12(F_* - G_2)^2\mu_* & & & -12F_*^2\mu_* & -12(F_* + G_2)^2\mu_* \\ & & +12\mu_*^2 & & & +12\mu_*^2 & +12\mu_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{0,-1}^0 \\ P_{0,1}^0 \\ P_{0,-1}^{-1} \\ P_{0,0}^{-1} \\ P_{0,1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

と同じ5個の差分点を使用することによって、 x, y 方向の流速比が異なった場合でも、一次元中央型重み付差分法とほぼ同程度の範囲で精度の高い解析を得ることができる。

4. まとめ 実際の河海岸線や海岸線のような複雑な水陸境界をもつ領域での二次元移流拡散解析にあたって、本報に示す二次元重み付差分法を使用すれば、不規則な格子間隔にほとんど左右されることなく、また、 x, y 方向の流速比

の如何に関わらず、精度よく計算できる。また、実水域の解析では、無次元拡散係数(μ)が小さく、無次元流速(F)が大きい箇所(図4.5で右上隅部分)が演算上有利となる。

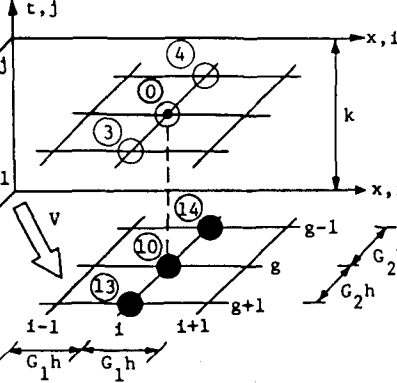


Fig.2 y-parallel center scheme

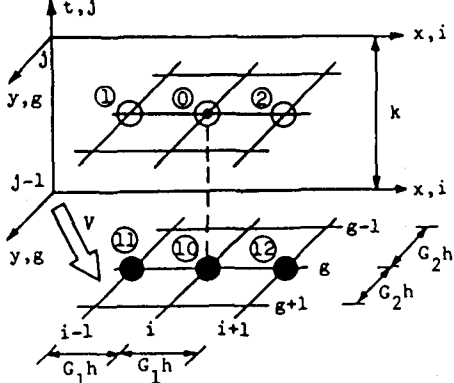


Fig.3 x-parallel center scheme

この F/μ の比が大きくなり、流速項が卓越する場合には、一次元重み付差分法と同様に、上流型重み付差分法が有効であろうと考えられる。今後は、このような場合に使用できる不規則境界をもつ二次元重み付差分法を検討していきたい。なお、本研究の一部には文部省科研費をあてた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -G_1 & G_1 & F_* - G_1 \\ G_1^2 & G_1^2 & (F_* - G_1)^2 - 2\mu_* \\ & (F_* - G_1)^3 & F_*^3 \\ -G_1^3 & G_1^3 & -6(F_* - G_1)\mu_* \\ & (F_* - G_1)^4 & F_*^4 \\ G_1^4 & G_1^4 & -12(F_* - G_1)^2\mu_* \\ & +12\mu_*^2 & +12\mu_*^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ F_* \\ F_* + G_1 \\ F_*^2 - 2\mu_* \\ (F_* + G_1)^2 - 2\mu_* \\ F_*^3 \\ (F_* + G_1)^3 \\ -6F_*\mu_* \\ -6(F_* + G_1)\mu_* \\ F_*^4 \\ (F_* + G_1)^4 \\ -12F_*^2\mu_* \\ -12(F_* + G_1)^2\mu_* \\ +12\mu_*^2 \\ +12\mu_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{-1,0}^0 \\ S_{1,0}^0 \\ S_{-1,0}^{-1} \\ S_{0,0}^{-1} \\ S_{1,0}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$C(x,y,t)=\exp((-x+vt_1)/\sqrt{d_1}+(-y+vt_2)/\sqrt{d_2}+2t) \quad (11)$$

$$F_* = G_1 \cdot F_x + G_2 \cdot F_y, \quad \mu_* = (G_1)^2 \cdot \mu_x + (G_2)^2 \cdot \mu_y \quad (12)$$

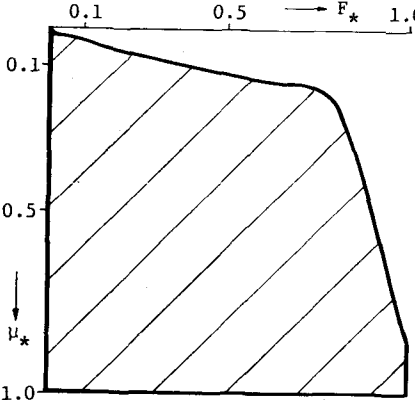


Fig.4 two dim. center scheme

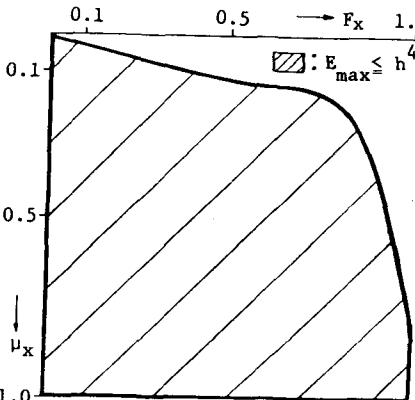


Fig.5 one dim. center scheme

参考文献

- 1) 加納・赤坂・空間：不規則境界をもつ二次元領域の移流分散方程式のADI法的重み付差分式解、第40回年講2部
- 2) 加納・上田：重み付差分式による一次元移流分散方程式の数値解について、土木学会論文報告集、第357号/Ⅱ-3 1985.5月