浮遊粒子の飛距離と飛高について

九州大学 工学部 正 員 平野 宗夫
九州大学 工学部 正 員 大本 照憲
九州大学 大学院 学生員 ○松枝 修治
九州大学 工学部 学生員 田代 譲治

1、はじめに

著者らは、前報[1]で河床の影響が比較的小さい流送過程における浮遊粒子の軌道を Basset, Boussinesq, および Oseen の式を基礎式として数値計算を行なった。その際、流体と浮遊粒子の相対加速度が存在する場合に履歴効果として働く Basset 項を省略するとともに、浮遊粒子に対する時間微分と流体粒子に対する時間微分を等しく置いた。前者の仮定は、土屋等[3]により抗力が速度の二剰に比例する場合には Basset 項は省略できることが指摘されている。後者の仮定は、浮遊粒子が常に同一の流体塊に囲まれていること、即ち、流線と浮遊粒子の軌道とが一致することを前提としている。本研究は、Basset 項, 流線と浮遊粒子の軌道が異なる影響、slip-shear motion による揚力および壁面の効果を考慮に入れた運動方程式を導出し、浮遊粒子の上昇運動を追跡する数値シミュレーション法を提示したものである。

2、数値シミュレーションの概要

(1)、浮遊粒子の運動方程式

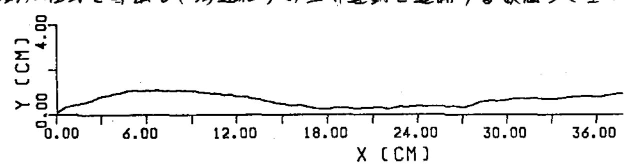

図 浮遊粒子の軌跡の一例

目視観察によれば、浮遊粒子は河床近傍で間欠的に発生する大規模な組織渦に捕捉されて上昇運動を開始し、その後、組織渦から逸脱した粒子はランダムな流体力を受けながら平均的にはほぼ静水中の沈降速度で下降運動を続ける。相対水深が 0.1 以下では、鉛直方向の乱れの強さは深さ方向に正の勾配を持つため浮遊粒子に対して揚圧力として作用する。このため、河床に近づいた浮遊粒子は鉛直方向の作用力がバランスして河床に平行な軌道を取るものが多く、その中で飛距離の大きい粒子は、再び組織渦に捕捉され上記の軌道を繰り返す。河床近傍を浮遊する粒子の x 方向および y 方向の運動方程式は、Basset, Bousinesq および Oseen の式に、壁面効果[2]およびせん断流に於いて浮遊粒子と流体に相対速度がある場合(slip-shear motion)に生ずる揚力を考慮すれば次式のようになる。

$$\rho_p \cdot A_3 \cdot d^3 \frac{du_p}{dt_p} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_2 \cdot d^2 \cdot C_D \cdot C_1 \cdot V_r \cdot (u_{fL} - u_p) - A_3 \cdot d^3 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho A_3 \cdot d^3 \frac{d}{dt_p}(u_{fL} - u_p) + \rho \cdot A_2 \cdot d^2 \sqrt{\frac{36\nu}{\pi}} \int_{t_0}^{t_p} \frac{\frac{d}{dt}(u_{fL} - u_p)}{\sqrt{t_p - \tau}} \cdot d\tau + F_{px} \qquad (1)$$

$$\rho_p \cdot A_3 \cdot d^3 \frac{dv_p}{dt_p} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_2 \cdot d^2 \cdot C_D \cdot C_2 \cdot V_r \cdot (v_{fL} - v_p) - A_3 \cdot d^3 \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \rho A_3 \cdot d^3 \frac{d}{dt_p}(v_{fL} - v_p) + \rho \cdot A_2 \cdot d^2 \sqrt{\frac{36\nu}{\pi}} \int_{t_0}^{t_p} \frac{\frac{d}{dt}(v_{fL} - v_p)}{\sqrt{t_p - \tau}} \cdot d\tau + F_\ell + F_{py} \qquad (2)$$

ここに、(u_p, v_p) および $(u_{fL} - v_{fL})$ は、各々、粒子と流体の x 方向と y 方向の速度, ρ_p, ρ ; 粒子, 流体の密度, A_2, A_3 ; 粒子の面積および体積に関する形状係数, V_r ; 粒子と流体の相対速度の絶対値, F_{px}, F_{py} ; 粒子に働く外力, C_1, C_2 ; 壁面効果による抗力の補正係数である。又、$\frac{d}{dt}$ は流体粒子に追随した時間微分, $\frac{d}{dt_p}$ は浮遊粒子に追随した時間微分である。Slip-Shear motion に揚力は、Saffman[4]により次式のように与えられている。

$$F_\ell = K \cdot \mu \cdot d^2 \cdot \left(\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial u_f}{\partial y}\right)^{1/2} \cdot (u_f - u_p) \qquad (3)$$

ここに、$K = 1.615$, μ, ν ; 流体の粘性係数および動粘性係数である。流速勾配は渦度変動の強さ $\sqrt{\overline{\omega'^2}}$ で近似すると, エネルギー逸散率, 乱れの最小渦経と次のように関係づけられる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq \sqrt{\overline{\omega'^2}} = (\epsilon/\nu)^{1/2} = \frac{\nu}{\eta^2} \qquad (4)$$

また浮遊粒子と流体の時間微分は、各々、次のようになる。

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_f\frac{\partial}{\partial x}+v_f\frac{\partial}{\partial y}\simeq v_f\frac{\partial}{\partial y}\quad,\quad \frac{d}{dt_p}=\frac{\partial}{\partial t}+u_p\frac{\partial}{\partial x}+v_p\frac{\partial}{\partial y}\simeq v_p\frac{\partial}{\partial y} \tag{5}$$

式(1)に於いて、圧力勾配はNavier-Stokesの方程式から流体の加速度項と粘性項によって表わされる。ここでは粗面乱流を対象としていることから粘性項を省略する。式(2)〜(4)を式(1)に代入し、長さスケールに水深h，速度スケールに摩擦速度u_*，時間スケールにh/u_*を用いて無次元化すると、浮遊粒子の運動方程式は次のように表わされる。

$$\frac{du_p}{dt_p}=\beta\frac{du_{fL}}{dt_p}+C_1C_D\beta\frac{A_2}{3A_3}\frac{h}{d}V_r(u_{fL}-u_p)+\beta\left(\frac{3\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t_p}\frac{\frac{d}{d\tau}(u_{fL}-u_p)}{\sqrt{t_p-\tau}}d\tau+\frac{2}{3}\beta\cdot(v_{fL}-v_p)\frac{\partial u_{fL}}{\partial y}+\frac{2(\rho_p-\rho)}{2\rho_p+\rho}\cdot\frac{gh i_0}{u_*^2} \tag{6}$$

$$\frac{dv_p}{dt}=\beta\frac{dv_{fL}}{dt}+C_2C_D\beta\frac{A_2}{3A_3}\frac{h}{d}V_r(v_{fL}-v_p)+\beta\left(\frac{3\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t_p}\frac{\frac{d}{d\tau}(v_{fL}-v_p)}{\sqrt{t_p-\tau}}\cdot d\tau+\frac{2}{3}\beta(v_{fL}-v_p)\frac{\partial v_{fL}}{\partial y}$$
$$+\frac{K}{3\pi}\alpha\beta\frac{d}{\eta}(u_f-u_p)-\frac{2(\rho_p-\rho)}{2\rho_p+\rho}\cdot\frac{gh}{u_*^2} \tag{7}$$

$$\alpha=12(h/d)^2/(u_*h/\nu)\quad,\quad \beta=3\rho/(2\rho_p+\rho) \tag{8}$$

浮遊粒子に追随した流体のLagrange的加速度を厳密に記述することは難かしく、次式のように簡単化する。

$$\frac{du_{fL}}{dt_p}\simeq v_p\frac{\partial u_f}{\partial y}\quad,\quad \frac{dv_{fL}}{dt_p}\simeq v_p\frac{\partial\sqrt{\overline{v'^2}}}{\partial y} \tag{9}$$

ここに，U_fは局所平均流速，$\sqrt{\overline{v_f'^2}}$は鉛直方向の乱れの強さである。

(2)、浮遊粒子の軌道の数値シミュレーションの手法

式(6)(7)より浮遊粒子の軌道を数値計算により求めるには、入力としての流体の運動特性量が必要である。流速は、時間平均成分と変動成分との和として表わす。平均流速は対数分布則を適用する。変動成分は一次マルコフ過程に従うものと考え、1ステップ前の流速変動が関与する成分とランダム成分との和で次のようになる。

$$u_{fi}'(t+\Delta t)=u_{fi}'(t)\cdot\rho_L^i(\Delta t)+e_i(t+\Delta t) \tag{10}$$

ここに、Δtはステップ時間，$\rho_L^i(\Delta t)$はi方向のLagTime Δtに対するLagrange的自己相関係数である。また、ランダム成分は、二次元正規分布に従うものと考え、x方向のランダム成分e_xの生起確率$P(e_x)$を事前確率，y方向のランダム成分e_yの生起確率$P(e_y)$を事後確率とすると次のようになる。

$$P(e_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{ex}}\cdot\exp\left(-\frac{e_x^2}{2\sigma_{ex}^2}\right)\quad,\quad P(e_y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}\sigma_{ey}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_{ey}^2}\left(e_y-r\cdot\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}}\cdot e_x\right)^2\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ex}&=\sigma_x\left[1-\{\rho_L^x(\Delta t)\}^2\right],\quad \sigma_x=\sqrt{\overline{u_f'^2}}\\ \sigma_{ey}&=\sigma_y\left[1-\{\rho_L^y(\Delta t)\}^2\right],\quad \sigma_y=\sqrt{\overline{v_f'^2}}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$r=-(1-y/h)\cdot(u_*^2/\sigma_x\cdot\sigma_y) \tag{13}$$

式(12)は、ステップ時間内では乱れの強さは保存されることを表わしている。Lagrange的自己相関係数$\rho_L^i(\Delta t)$は、指数分布を仮定すれば、次式で表わされる。

$$\rho_L^i(\Delta t)=\exp(-\Delta t/T_L^i) \tag{14}$$

ここに、T_L^iはi方向のLagrange的時間スケールである。浮遊粒子の軌道は、式(5),(6)を基礎式とし，Runge Kutta法を用いて求めることができる。その際、各ステップでの流速変動u_f', v_f'は式(10)を下に模擬乱数を発生させ、式(9)により得られる。

3、おわりに

本シミュレーション法では、乱れの強さ$\sqrt{\overline{u_f'^2}}$, $\sqrt{\overline{v_f'^2}}$およびLagrange的時間スケールT_L^i，乱れの最小渦径ηが与えられれば、二次元開水路乱流場に於いて浮遊粒子の運動を追跡することが可能である。今後、浮遊粒子の軌道に関して数値計算と実験データとの比較を行う予定である。

参考文献

1)、平野・大本・安藤、第40回年講

2)、P. Vasseur and R.G. Cox，J. Fluid Mech. 78, 385 (1977)

3)、土屋、渡辺，青山 京大防災研究所年報第12号B

4)、P.G. Saffman，J. Fluid Mech. 31, 624, (1968)