改良型K－εモデルの提案とその応用

九州大学　工学部　正員　小松　利光
九州大学　工学部　正員　松永　信博
九州大学大学院　学生員　仲敷　憲和
九州大学大学院　○学生員　細山田　得三

1．まえがき　近年電子計算機の発達に伴い，種々の仮定や近似を用いた乱流モデルが提案され、かなりの精度まで乱流の計算が可能となっている。K－εモデルは，有力な乱流モデルとして注目を集め，近年活発な研究が重ねられた結果，実用計算にもある程度用いられるようになってきた。しかしながら，このモデルは，根本的な矛盾を抱えており，簡単な乱れの場に適用した際に，完全に破綻することが明らかになった。本研究では，従来のK－εモデルの矛盾点を指摘し，物理的考察と実験的根拠に基づいた新たなK－εモデルを提案して，これを解決した。さらに、新たなK－εモデルを実際の流れの場に適用してその妥当性を検証した。

2．K－εモデルの問題点　乱れエネルギーK，及び乱れエネルギー散逸率εを用いた従来のK－εモデルを生成項と散逸項が釣り合うような簡単な流れの場に適用してみる。現象を定常と仮定すると基礎式は、

$$0 = -C_{\varepsilon 1}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\varepsilon$$

$$0 = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \tag{1}$$

となる。ここで $C_{\varepsilon 1}$，$C_{\varepsilon 2}$は、定数である。両式は，同値であり，未知量K，εを決定する力をもっていない。また，乱れエネルギーの輸送と乱れエネルギーの散逸率が釣り合う流れ場である一様流中の格子乱流や、振動格子乱流において，K，εに対してべき乗分布を仮定すれば、指数を決定する式もまた同値となり、従来のK－εモデルは力を持たないことがわかる。この問題を解決するため，εの散逸率の表現$C_{\varepsilon 2}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\varepsilon$ を改良する必要があると考えられる。その理由は，$C_{\varepsilon 2}\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)\varepsilon$が上記の３つの乱流場に共通して現れる項であり，その表現は，単なる次元的考察により導かれたものだからである。

3．実験方法　εの散逸率を実験的に直接測定し，K，εを用いて評価するために，乱流拡散と散逸が釣り合う振動格子乱流を使用した。作業流体としては、グリセリン水溶液を用い，動粘性係数を種々変化させた。実験装置，及び実験方法の詳細は文献を参照されたい。動粘性係数ν，格子の振動幅S_0，振動数f_0の詳しい条件は表－1に示されている。

表－1　実験条件

Exp. No.	viscosity ν (cm²/s)	stroke S0 (cm)	freqency f0 (Hz)	symbol
1	0.15	4.0	4.0	●
2	0.16	4.0	2.0	
3	0.17	4.0	6.0	
4	0.17	8.0	2.0	
5	0.10	8.0	2.0	▲
6	0.10	4.0	2.0	
7	0.10	4.0	4.0	
8	0.11	4.0	6.0	
9	0.073	4.0	2.0	○
10	0.073	4.0	4.0	
11	0.068	4.0	6.0	
12	0.075	8.0	2.0	
13	0.010	8.0	2.0	△
14	0.010	4.0	2.0	
15	0.010	4.0	4.0	
16	0.010	4.0	6.0	

4．εの散逸率のモデル化と乱れエネルギーの拡散項の評価

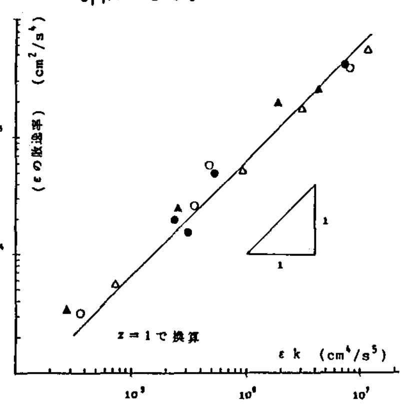
乱れエネルギーK，乱れエネルギーの散逸率ε，εの散逸率は、以下の式で評価できる。

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}) = \frac{1}{2}(2\overline{u'^2}+\overline{w'^2})$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}\overline{(u'^2+v'^2+w'^2)w'}\right\} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}(2\overline{u'^2 w'}+\overline{w'^3})\right\} \tag{2}$$

$$\varepsilon\text{の散逸率} = \frac{d}{dz}\left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\right)$$

そこで、εの散逸率を，K，εを用いてモデル化するためにK－εモデルに現れる唯一の無次元量である乱流Re数$\frac{K^2}{\nu\varepsilon}$に対してそれらの依存性を調べた。その結果，粘性が大きい時には　若干のばらつきがあるが、$K \propto \left(\frac{\nu\varepsilon}{K^2}\right)^{-1}$，$\varepsilon \propto \left(\frac{\nu\varepsilon}{K^2}\right)^{-2}$，及びεの散逸率$\propto \left(\frac{\nu\varepsilon}{K^2}\right)^{-3}$の関係がほぼ成り立っていることがわかった。これより，εの散逸率はεKに比例する形で表されると推測される。そこで、εの散逸率をεKに対してプロットしたものを図－1に示す。図



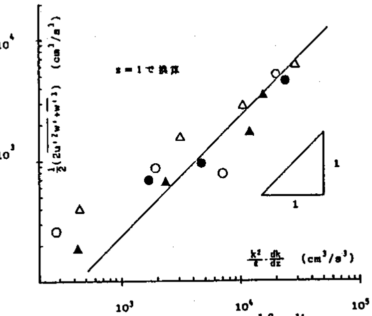
図－1　εの散逸率とεkとの関係

より、εの散逸率はεKに比例することが明らかであり、εの散逸率の新たな評価として次の経験式を提案する。

$$\varepsilon\text{の散逸率} = C'\varepsilon K \qquad C' = 0.065\ \mathrm{s/cm^2}$$

係数C'は、次元をもつが、従来のK−εモデルの破綻を救うため、係数に次元をもたせることが必要であると考えられる。次に乱れエネルギー拡散フラックスをフィック型拡散型で評価する際に生ずる不適定数を求める。従来のK−εモデルにおいてエネルギーフラックスは、εKより、

$$\frac{1}{2}\left(\overline{2u'^2w'} + \overline{w'^3}\right) = -C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{dk}{dz} \tag{3}$$



図−2　乱れエネルギー・フラックスと $\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{dk}{dz}$ との関係

で評価される。振動格子乱流では、エネルギーフラックスを簡単に測定でき、C_kを直接評価することができる。図−2に乱れエネルギーフラックスと $\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{dK}{dz}$ との関係を示す。これよりC_kの値は、0.23となる。上述の評価に基づいて改良されたK−εモデルは、次式で表される。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \overline{u_i'u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) - C_{\varepsilon 1}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C'\varepsilon k \tag{4}$$

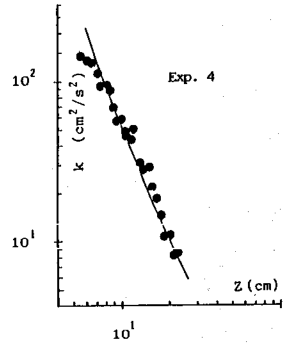
ただし、

$$C_k = 0.23,\quad C_\varepsilon = 0.0692,\quad C_{\varepsilon 1} = 1.43,\quad C' = 0.065\ \mathrm{s/cm^2}$$

5. 新しいK−εモデルの実際の流れ場への適用　前節で提案したK−εモデルを振動格子乱流へ適用すると基礎式は、次のようになる。

$$0 = \frac{d}{dz}\left(C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{dk}{dz}\right) - \varepsilon$$

$$0 = \frac{d}{dz}\left(C_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\right) - C'\varepsilon k \tag{5}$$



図−3　振動格子におけるエネルギーの減衰

K, εの関数形として、べき乗を仮定し、さらに仮想原点を導入すると、式(5)より、K, εの分布は、

$$k = 329(z+z_0)^{-2}$$
$$\varepsilon = 6995(z+z_0)^{-4} \tag{6}$$

となる。ここに、z_0は格子振動中心と仮想原点とのずれを表す。図−3は、Kの測定結果の一例である。図中の実線は、式(6)で示される仮想原点を考慮した理論解であり、測定値とよく一致していることがわかる。

6. むすび　従来のK−εモデルを、単純化された流れに適用すると、原理的に破綻する。この原因は、εの散逸率の評価に問題があった。我々は、振動格子乱流という単純な流れ場の測定に基づき、εの散逸率のモデル化を行い、その結果、εの散逸率として、0.065εKで表される経験式を得た。従来のK−εモデルを用いた計算結果が、ある程度現象を説明し得たのは、ε−方程式の散逸項以外の項が比較的大きいため、散逸項の持つ欠陥が他の項の中に埋没してしまい、単なる誤差としてしか表に出て来なかったからであると考えられる。ここで新たに提案した改良されたK−εモデルは、これらの問題を解決できるものと期待される。今後さらに複雑な乱流場に本モデルを適用し、改良型K−εモデルの妥当性を検討していく予定である。

謝辞　最後に　K−εモデルの欠陥について示唆していただき、本研究を始めるきっかけを与えて下さった九州大学名誉教授　椿東一郎先生(現長崎大学教授)に深甚なる謝意を表します。

〈参考文献〉

1) 浦,小松,松永(1984):振動格子の乱れによる密度界面の変動特性と連行現象,土木学会論文集,345号/II-1.

2) 小松,松永,仲敷,細山田:K-ε乱流モデルの問題点とその改良,第30回水理講演会(1986)

3) Hanjalic, K and Launnder , B.E. (1971),A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow,J.Fluid,Mech. vol.52