土木学会西部支部研究発表会(1986.3)

半無限領域における2次元面内波動場のBEM解析

熊本工業大学　正員　○上杉　真平
熊本大学工学部　正員　大津　政康

1．はじめに

半無限領域の問題の解析に、境界要素法が有効であることはよく知られている。これまで多くの研究成果が発表されているが、一般には複雑な半無限領域における基本解を用いて定式化が行われている。しかしながら、面内波動場では、波の性質上、半無限領域における基本解を求めることは容易ではない[1]。著者らは、これまで半無限領域における問題を無限領域における基本解を用いて定式化する簡単な手法を提案し、面外問題においてその有用性を確認してきた[2]。本研究では、さらにこの手法を面内問題に適用し、その妥当性を検討する。

2．定式化

Fig. 1に示されるような等方，等質かつ線形の弾性体の領域における波動問題の支配方程式は、次のようなNavierの式で表わされる。

$$(\lambda+\mu)\bar{u}_{j,ji}(x,t)+\mu\bar{u}_{i,jj}(x,t)+\bar{f}_i(x,t)=\rho\ddot{\bar{u}}_i(x,t)\quad,\ i,j=1,2,3\quad(1)$$

ここに、$\bar{u}_i$は変位ベクトル、$\bar{f}_i$は物体力ベクトル、λ，μはLaméの常数、そしてρは密度である。

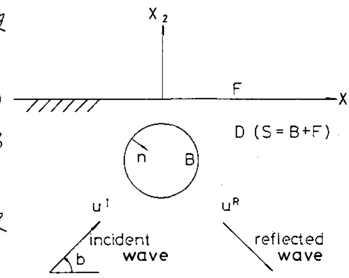

Fig.1　領域と境界

いま、定常状態を仮定し、平面ひずみ問題を考えるものとすると、面内波動方程式は式（1）より次のように得られる。

$$(k_s^2/k_p^2-1)u_{\beta,\beta\alpha}(x)+u_{\alpha,\beta\beta}(x)+k_s^2u_\alpha(x)=0\quad,\quad\alpha,\beta=1,2\qquad(2)$$

ただし、k_s，k_pはPおよびSV波の波数であり、また、物体力はその影響が小さいものとして無視している。ところで、式（2）を満足する面内波動場の変位u_αは、一般に次のように表わされる。

$$u_\alpha(x)=u_\alpha^0(x)+u_\alpha^S(x)\qquad(3)$$

u_α^0，u_α^Sは、それぞれ自由場および散乱場の変位である。また、自由場の変位が境界S上で応力自由の境界条件を満足するような反射波u_α^Rを考えると、自由場の変位は、入射波u_α^Iと反射波の和として次のように得られる。

$$u_\alpha^0(x)=u_\alpha^I(x)+u_\alpha^R(x)\qquad(4)$$

ここで、入射波として平面波を仮定し、入射場および反射場として次のようなものを考える。

$$u_\alpha^I(x)=\phi^I_{,\alpha}+e_{\alpha\beta}\psi^I_{,\beta}\qquad(5)$$

$$u_\alpha^R(x)=\phi^R_{,\alpha}+e_{\alpha\beta}\psi^R_{,\beta}\qquad(6)$$

ただし、

$$\phi^I=\exp\{i(x_1k_p\cos b+x_2k_p\sin b)\}$$
$$\psi^I=\exp\{i(x_1k_s\cos b+x_2k_s\sin b)\}\qquad(7)$$

$$\phi^R=K_p\exp\{i(x_1k_p\cos b-x_2k_p\sin b)\}$$
$$\psi^R=K_s\exp\{i(x_1k_s\cos b-x_2k_s\sin b)\}\qquad(8)$$

である。ここに、ϕ，ψはLaméのポテンシャルと呼ばれ、それぞれP波に関する変位を表わすスカラーポテンシャルおよびSV波についての変位を示すベクトルポテンシャルである。bは入射角、$e_{\alpha\beta}$はpermutation symbolであり、K_p，K_sはPおよびSV波の反射係数である。これは、入射波に対する反射波の変位振幅の比を示すもので、自由表面での応力自由の条件を満足するように定められる。また、SV波がその臨界角を越えて入射した場合、境界面F上を伝わる特殊な反射P波（SP波）が発生するので、この時は次のようなSP波のポテ

ンシャルを考える。

$$\Phi' = K_p \exp(i k_s \cos b \cdot x_1 + k_s \cos b \cdot \xi x_2) \quad , \quad \xi = \sqrt{1-(C_s/C_p \cos b)^2} \tag{9}$$

散乱場の変位は、一重層ポテンシャルによって表わされるものとすると、次のように積分表示される。

$$U^S_\alpha(x) = \int_S G_{\alpha\beta}(x,\xi) f_\beta(\xi)\, dS \tag{10}$$

ここに、f_β は積分密度と呼ばれるものである。$G_{\alpha\beta}$は無限領域における基本解であり、Sommerfeld の放射条件を満たすように定められ、次式のように求められている。

$$G_{\alpha\beta}(x,\xi) = i/4\mu\left[H_0^{(1)}(k_s r)\delta_{\alpha\beta} + 1/k_s^2\{H_0^{(1)}(k_s r) - H_0^{(1)}(k_p r)\}_{,\alpha\beta}\right] \tag{11}$$

ただし、$H_n^{(1)}$ は第1種Hankel関数、rは点xとξの距離である。

いま、境界F上において応力自由の条件が与えられると、これより次のような特異積分方程式が得られる。

$$-t^o_\alpha(x) = \frac{1}{2} f_\alpha(x) + \int_S T_{\alpha\beta}(x,\xi) f_\beta(\xi)\, dS \tag{12}$$

ただし、

$$T_{\alpha\beta}(x,\xi) = \mu\{G_{\alpha\beta,\gamma}n_\gamma + G_{\gamma\beta,\alpha}n_\gamma + 2\nu/(1-2\nu)\, G_{\gamma\beta,\gamma}n_\alpha\} \tag{13}$$

であり、t^o_α は自由場の表面力である。よって、全体場U_αは、式（12）より決められるfを用いて、式（3），（10）より得られる。

3．数値解析および解析結果

ここでは、半無限境界Fを近似する有限長さ（ELと記す。）について検討した。Fig. 2，3，4および5は、P，SV波が鉛直入射した時の半無限境界F上の積分密度fの分布と円孔上の変位振幅を計算したものである。Fig. 2，4の分布より、ELを半径aの10倍にとって変位振幅を計算したが、40aにとったものとほとんど差がなく、半無限境界を有意と思われる有限長さで近似することの妥当性が確認できた。しかし、Fig. 6のように斜めに入射する場合は回折波の影響のために、近似長さELの違いによる差異が大きく、本法の適用には、さらに工夫が必要であろう。

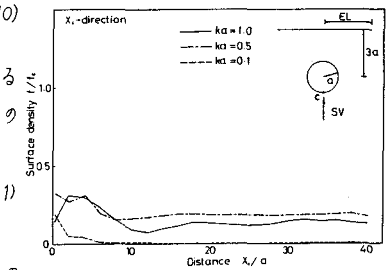

Fig.4 積分密度分布

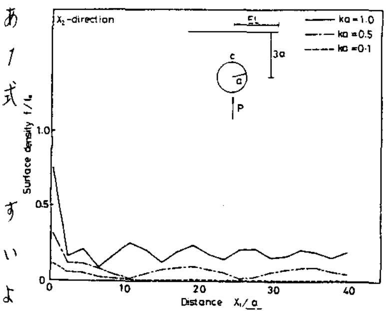

Fig.2 積分密度分布

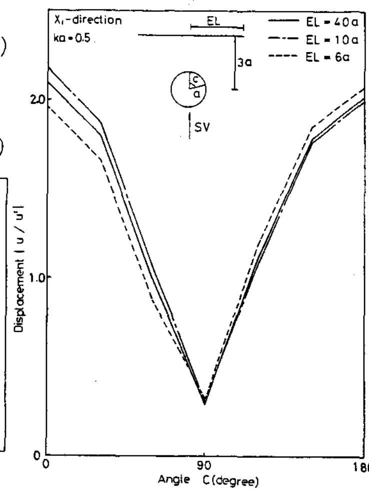

Fig.5 円孔上の変位振幅

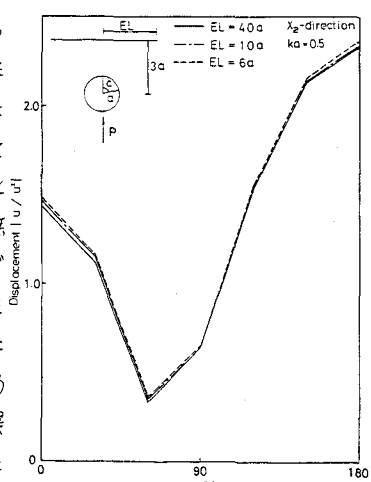

Fig.3 円孔上の変位振幅

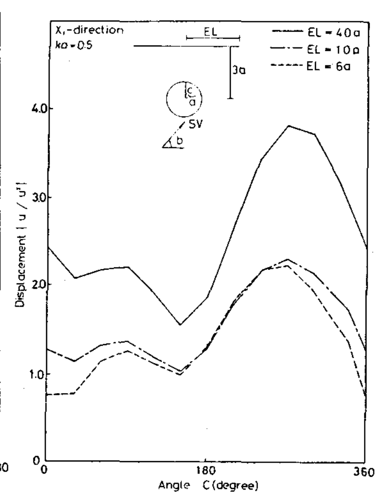

Fig.6 円孔上の変位振幅

〈参考文献〉1) Kobayashi, S.: Some ploblems of The Boundary Integral Equation Method in elastodynamics, Proc. 5th. Int. Conf. BEM in eng., 1983.

2) Ohtsu, M. and S. Uesugi: Analysis of alastic wave field in a half-space and some application to earthquake engineering, 6th. Int. Conf. BEM in eng., 1984.