

不規則分布荷重を受ける骨組構造系の確率有限要素による解析

長崎大学工学部 学生員 大和田 徹

長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏

1. はじめに 着者はすでに、不規則分布荷重が作用する構造系の確率的解析法として、有限要素法による解析を提案している。この場合、節点荷重として分布荷重を部材の区間で積分した集中荷重で評価した。しかし、有限要素法では、分布荷重は等価節点力で評価される。本研究では、不規則分布荷重を等価節点法で評価し、荷重の共分散行列の誘導するための手順を示したものである。不規則分布荷重として、白色雑音でモデル化した場合と、指数関数型の相関を有する場合について考える。具体的な数値計算例として、はり、連続はり、平面骨組構造を対象として、荷重のモデル化による応答の精度について検討した。

2. 確率有限要素法の概要

全体座標系において、 N 節点の

節点変位と節点力を定義すると

$$\begin{aligned} X &= [X_1, \dots, X_N]^T \\ P &= [P_1, \dots, P_N]^T \end{aligned} \quad (1)$$

となり節点方程式 $KX = P$

を得る。ここに K は全体剛性行列である。変形と断面力を図-1 のように定義すると、 i 節点、 j 節点の断面力

部材剛性行列を用いて次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

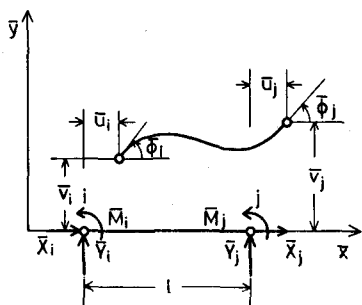


図-1 はりの要素の変位と断面力

(2)式において、節点力 P を確率変数とすると変位も確率変数になり、

$$\text{両辺に平均の操作を施すと} \quad KE[X] = E[P] \quad (4)$$

平均値応答の解析は、従来の有限要素法の解析に一致する。(2)式の分散、共分散は次式で与えられる。

$$KE[X \tilde{X}] K^T = E[\tilde{P} \tilde{P}] \quad (5)$$

この式が確率有限要素法の基礎式である。ここで～の記号は平均値回りの変動を示す。外力 P の分散、共分散が与えられると(5)式により、座標変換行列 Λ_i を用いて部材、子部材の変位及び断面力の分散、共分散が求められ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E[\tilde{u}_i \tilde{u}_j^T] &= \Lambda_i^T E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j^T] \Lambda_j \\ E[\tilde{f}_i \tilde{f}_j^T] &= \begin{bmatrix} \Lambda_i^T E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j^T] \Lambda_j & \Lambda_i^T E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j^T] \Lambda_c \\ \Lambda_c^T E[\tilde{x}_j \tilde{x}_i^T] \Lambda_i & \Lambda_c^T E[\tilde{x}_j \tilde{x}_j^T] \Lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ii} \\ K_{ij} \\ K_{ji} \\ K_{jj} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. 荷重のモデル化

まず、等価節点力について示す。外力

の共分散行列を誘導するために荷重のモデル化を考える。不規則分布荷重 $q(x)$ を節点力で評価するためには、等価節点力も考える必要がある。図-2 で示される点に作用する等価節点力は

$$\begin{aligned} P_{i-1}^b &= [N_{i-1}^b \ S_{i-1}^b \ M_{i-1}^b]^T \\ P_i^a &= [N_i^a \ S_i^a \ M_i^a]^T \end{aligned} \quad (7)$$

であり次のように表わされる。

$$\begin{aligned} P_{i-1}^b &= B_{i-1} \int_0^l \phi(x) q(x+l_{i-1}) dx \\ P_i^a &= A_i \int_0^l \phi(x) q(x+l_i) dx \end{aligned} \quad (8)$$

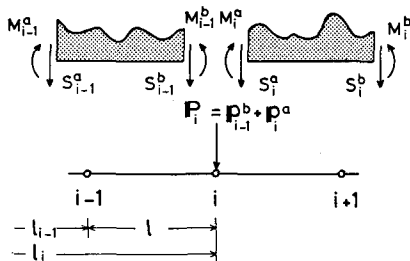
ここに $\phi(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]^T$ 

図-2 等価節点力

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2}l^2 & -\frac{2}{3}l^3 \\ 0 & -1 & \frac{2}{l} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}l^2 & \frac{2}{3}l^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

節点の荷重ベクトルは、次式で与えられる。

$$P_i = P_{i-1}^b + P_i^a \quad (9)$$

ただし、境界では、 $P_0 = P_1^a$ 、 $P_n = P_n^b$ とする。

次に荷重の分散、共分散を示す。ここでは不規則分布荷重として、白色雑音過程を考える。確率特性は次式となる。ここで σ は分布荷重の強度である。

$$E\{q(x_1)q(x_2)\} = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \quad (10)$$

任意の i 節点、 j 節点の共分散は $E\{P_i P_j^T\}$ となり、 $i=j$ の場合（ただし $i=0, 1, n-1, n$ ）について例を示す。

$$\begin{aligned} E\{P_i P_i^T\} &= E\{P_i^b P_i^{bT}\} + E\{P_i^a P_i^{aT}\} + E\{P_i^b P_i^{aT}\} + E\{P_i^a P_i^{bT}\} \\ &= B_{i-1} \int_0^l \phi(\alpha) \phi(\alpha)^T \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 B_{i-1}^T + A_i \int_0^l \phi(\alpha) \phi(\alpha)^T \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 A_i^T \\ &= B_{i-1} \Phi(l) B_{i-1}^T + A_i \Phi(l) A_i^T \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$B_{i-1} \Phi(l) B_{i-1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}l & -\frac{1}{210}l^2 \\ 0 & -\frac{1}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} \quad A_i \Phi(l) A_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}l & \frac{1}{210}l^2 \\ 0 & \frac{1}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} \quad \Phi(l) = \begin{bmatrix} l & \frac{1}{2}l^2 & \frac{1}{6}l^3 & \frac{1}{24}l^4 \\ \frac{1}{2}l^2 & \frac{1}{3}l^3 & \frac{1}{4}l^4 & \frac{1}{5}l^5 \\ \frac{1}{6}l^3 & \frac{1}{4}l^4 & \frac{1}{5}l^5 & \frac{1}{6}l^6 \\ \frac{1}{24}l^4 & \frac{1}{5}l^5 & \frac{1}{6}l^6 & \frac{1}{7}l^7 \end{bmatrix}$$

同じ処理を各節点について行なえば、荷重の分散、共分散行列が得られる。

4. 数値解析と考察 数値解析は白色雑音過程でモデル化した不規則分布荷重が作用する単純ばりについて行なっている。ここでは等価節点力として(1)両端固定端断面力を用いた場合、(2)境界において移動-固定端断面力を用いたものとしている。図-3の(a)(b)(c)(d)はたわみ、たわみ角、曲げモーメント及びせん断力の応答を示したものである。それぞれ厳密解（実線）4分割（破線）10分割（1点破線）の応答を静的応答の最大値で規準化したものである。4分割の場合でもせん断力の応答を除いて良い一致を示している。表-1は、支間中央のたわみ、曲げモーメント、支点上のせん断力を数値で示した。等価節点力(1)の場合は、4分割の場合でも、たわみは厳密解と一致する。いずれのモデルを使用してもあまり大きな差異はみられない。分割数を20程度にとると、厳密解に一致する。相関のある場合については講演時に発表す

表-1 厳密解と各荷重モデルによる解析との比較

$\sigma_y(x)/\bar{y}_{max}$		たわみ ($x=L/2$)	曲げモーメント ($x=L/2$)	せん断力 ($x=0$)
厳密解		1.11508	1.15460	1.15469
集中荷重	4分割	1.11579	1.22474	0.93541
	10分割	1.11510	1.16661	1.04718
	20分割	1.11509	1.15758	1.11130
等価節点力 I	4分割	1.11509	1.21498	0.88304
	10分割	1.11509	1.16553	1.04589
	20分割	1.11509	1.15750	1.10028
等価節点力 II	4分割	1.10844	1.21498	0.91774
	10分割	1.11501	1.16553	1.05636
	20分割	1.11508	1.15750	1.10504

る。最後に、本研究の一部は昭和60年度文部省科学研究費、総合研究費A（代表 藤野陽三）の援助を受けて行なったものである。

〔参考文献〕の岡林 山崎 山手 構造工学論文集 V.1. 32A (1986年3月)

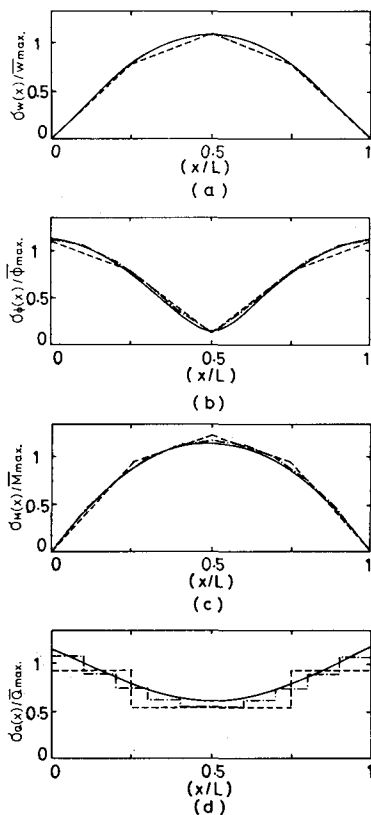


図-3 単純ばりの解析