不規則分布荷重を受ける骨組構造系の確率伝達マトリックス法による解析

長崎大学工学部　学生員○中川　実
長崎大学工学部　正　員　岡林　隆敏

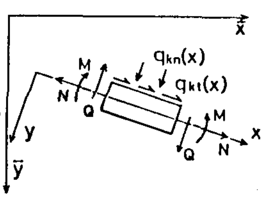
１．はじめに　　自動車荷重が作用する高架橋や雪荷重が作用する建築構造物などのように、不規則分布荷重でモデル化された荷重が作用する骨組構造系の確率的な応答解析において、これまで効果的な解析手法が確立しているとは言えない。著者らは、確率伝達マトリックス法を提案し[1][2]、任意の相関を有する不規則分布荷重の作用する、各種のはりやアーチ部材の解析を行ってきた。本研究は、任意の相関を有する不規則分布荷重が作用する平面骨組構造解析の手法を確立するために、その第一段階として、荷重を白色雑音過程でモデル化した場合の解析手法を提案すると共に、いくつかの数値解析結果を示したものである。解析手法は、直列型剛節構造物を対象にしている。この場合、節点で状態変数を伝達するために節点マトリックスを用いて処理している。

２．骨組構造系の状態空間表示

k-1節点とｋ節点の間にあるk部材に不規則分布荷重 q (x)が作用する場合を考える。k-1節点から部材にそった距離をｘとすると、状態変数は次式で定義される。

$$\mathbb{X}_k(x)=\left[U_k(x)\ \ V_k(x)\ \ \phi_k(x)\ \ N_k(x)\ \ Q_k(x)\ \ M_k(x)\right]^T \tag{1}$$

ここに、$u_k(x)$, $v_k(x)$, $\phi_k(x)$, $N_k(x)$, $Q_k(x)$及び$M_k(x)$は、それぞれ軸方向変位、部材変位、たわみ角、軸力、せん断力及び曲げモーメントである。ｋ部材の変形と断面力は、次の状態方程式に支配されている。



図－１　断面力と変位

$$\frac{d}{dx}\mathbb{X}_k(x)=\mathbb{A}_{\mathbb{x}k}(x)\mathbb{X}_k(x)+\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x)\quad(0\leqq x\leqq \ell_k)$$

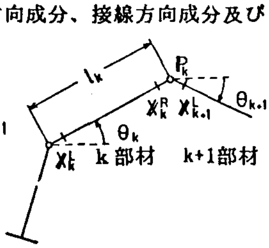
k-1節点条件：$\mathbb{X}_k(0)=\mathbb{X}_k^L$

境界条件：$\mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0,\quad \mathbb{X}(L)=\mathbb{X}_L$　　(2)

ここに、$\mathbb{X}_k^L$ は、ｋ部材の左端の状態変数、Ｌは始端から終端までの部材の全長である。外力ベクトルは、

$$\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x)=\left[0\ \ 0\ \ 0\ \ -q_{kn}(x)\ \ -q_{kt}(x)\ \ m(x)\right]^T$$

で与えられる。$q_{kn}(x)$, $q_{kt}(x)$及び$m(x)$は、それぞれ分布荷重の部材の法線方向成分、接線方向成分及び分布モーメントである。ｋ部材の左端の状態変数$\mathbb{X}_k^L$は、k-1節点の節点行列$\mathbb{P}_{k-1}$を介して、k-1部材の右端$\mathbb{X}_{k-1}^R$より伝達される。



図－２　ｋ部材

$$\mathbb{X}_k^L=\mathbb{P}_{k-1}\mathbb{X}_{k-1}^R \tag{3}$$

ここで、$\mathbb{P}_{k-1}$は次のようになる。

$$\mathbb{P}_k=\begin{bmatrix}\mathbb{C} & \mathbb{O}_{33}\\ \mathbb{O}_{33} & \mathbb{C}\end{bmatrix}\qquad \mathbb{C}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$(\varphi=\theta_k-\theta_{k+1})$

３．境界条件と境界マトリックス

始端では、回転支点及び固定支点に対してそれぞれ $[\phi_0\ N_0\ Q_0]^T$ 及び $[N_0\ Q_0\ M_0]^T$ の自由度がある。これを $\tilde{\mathbb{X}}_0$ で表すと、始端境界条件は、次式で表される。

$$\mathbb{X}_0=\mathbb{B}_{\mathbb{x}}\tilde{\mathbb{X}}_0 \tag{4}$$

ここに、$\mathbb{B}_{\mathbb{x}}$は始端境界マトリックスである。

終端では、回転支点及び固定支点に対して、終端ベクトル $\tilde{\mathbb{X}}_L$ は、$[u_L\ v_L\ M_L]^T$ 及び $[u_L\ v_L\ \phi_L]^T$ で表される。終端の条件は、

$$\mathbb{B}'_{\mathbb{x}}\mathbb{X}_L=\tilde{\mathbb{X}}_L=\mathbb{O} \tag{5}$$

となる。ここに、$\mathbb{B}'_{\mathbb{x}}$は終端境界マトリックスである。

４．荷重のモデル化

本研究では、任意の相関を有する荷重を解析する第一段階として、荷重を白色雑音過程でモデル化した場合について考える。ここで、荷重を次のように表す。

$$q_{kn}(x)=w(x)n_k(x)\ ,\ q_{kt}(x)=w(x)t_k(x) \tag{6}$$

ここに、n (x), t (x)は確定関数、w (x)は次のような確率変数を有する、白色雑音過程ベクトルである。従って、$\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x)$ の確率特性は、次式となる。

$$\left.\begin{aligned}&E[\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x)]=\mathbb{O}\\ &E[\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x_1)\mathbb{F}_{\mathbb{x}k}(x_2)^T]=\mathbb{Q}_{\mathbb{x}k}(x_1)\delta(x_1-x_2)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ここに、$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_k}(x)$ の要素は、次のようになる。

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_k}(x)=\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{33} & \mathbb{O}_{33}\\ \mathbb{O}_{33} & \Sigma\end{bmatrix}\quad \Sigma=\begin{bmatrix} n_k^2(x)\sigma^2 & n_k(x)t_k(x)\sigma^2 & 0\\ t_k(x)n_k(x)\sigma^2 & t_k^2(x)\sigma^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

5．不規則応答解析

応答の共分散は、次式で定義できる。

$$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}(x)=E\left[\hat{\mathbb{X}}_k(x)\hat{\mathbb{X}}_k(x)^T\right] \tag{8}$$

ここに、$\hat{\mathbb{X}}_k(x)=\mathbb{X}_k(x)-E[\mathbb{X}_k(x)]$ である。

k部材の応答の分散・共分散は、次の共分散方程式で与えられる。

$$\frac{d}{dx}\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}(x)=\mathbb{A}_{\mathbb{X}_k}(x)\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}(x)+\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}(x)\mathbb{A}_{\mathbb{X}_k}(x)^T$$
$$+\boldsymbol{\Phi}_{\mathbb{X}_k}(x,o)E\left[\mathbb{X}_k^L\mathbb{F}_{\mathbb{X}_k}(x)^T\right]$$
$$+E\left[\mathbb{F}_{\mathbb{X}_k}(x)\mathbb{X}_k^{L^T}\right]\boldsymbol{\Phi}_{\mathbb{X}_k}^T(x,o)+\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_k}(x)$$

k部材左端条件：$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}(o)=E\left[\mathbb{X}_k^L\mathbb{X}_k^{L^T}\right]$

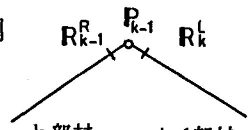
始端・終端条件：$\mathbb{R}_{\mathbb{X}o}$, $\mathbb{R}_{\mathbb{X}L}$ (9)

共分散方程式では、節点において、応答の共分散が節点マトリックスにより伝達される。

$$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}^L=\mathbb{P}_{k-1}\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{k-1}}^R\mathbb{P}_{k-1}^T \tag{10}$$

ここで、$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{k-1}}^R$ と $\mathbb{R}_{\mathbb{X}_k}^L$ は、図－3に示したように、k-1部材右端とk部材左端の応答の共分散行列である。

共分散方程式を解くためには、$E\left[\mathbb{X}_k^L\mathbb{F}_{\mathbb{X}_k}(x)^T\right]$ と $\mathbb{R}_{\mathbb{X}o}$ を求める必要がある。これらは、それぞれ次式より求めることができる。



図－3　節点マトリックス

$$E\left[\mathbb{X}_k^L\mathbb{F}_{\mathbb{X}_k}(x)^T\right]$$
$$=-\Lambda(k-1,o)\left(\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'\Lambda(n,o)\mathbb{B}_{\mathbb{X}}\right)^{-1}$$
$$\times\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'\Lambda(n,k+1)\mathbb{P}_k\boldsymbol{\Phi}_{\mathbb{X}_k}(\ell_k,x)\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_k}(x) \tag{11}$$

$$\mathbb{R}_{\mathbb{X}o}=-\mathbb{B}_{\mathbb{X}}\left(\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'\Lambda(n,o)\mathbb{B}_{\mathbb{X}}\right)^{-1}$$
$$\times\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'\mathbb{P}_{\mathbb{X}}(L)\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'^T\left(\left(\mathbb{B}_{\mathbb{X}}'\Lambda(n,o)\mathbb{B}_{\mathbb{X}}\right)^T\right)^{-1}\mathbb{B}_{\mathbb{X}}^T \tag{12}$$

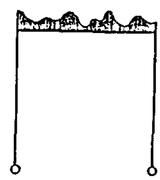
ここで、

$$\Lambda(k,s)=\mathbb{P}_k\boldsymbol{\Phi}_{\mathbb{X}_k}(\ell_k,o)\text{-----}\mathbb{P}_s\boldsymbol{\Phi}_{\mathbb{X}_s}(\ell_s,o)$$
$$\Lambda(o,o)=\mathbb{P}_o\ ,\ \Lambda(n,n)=\mathbb{P}_n$$

確率伝達マトリックス法では、始端条件 $\mathbb{R}_{\mathbb{X}o}=\mathbb{O}$ とした外力項の計算を行い、$\mathbb{P}_{\mathbb{X}}(x)$ を求め、次に、(12)式を用いて、始端条件 $\mathbb{R}_{\mathbb{X}o}$ を求める。以後、各節点毎の計算を進めてゆく。

6．数値解析と考察

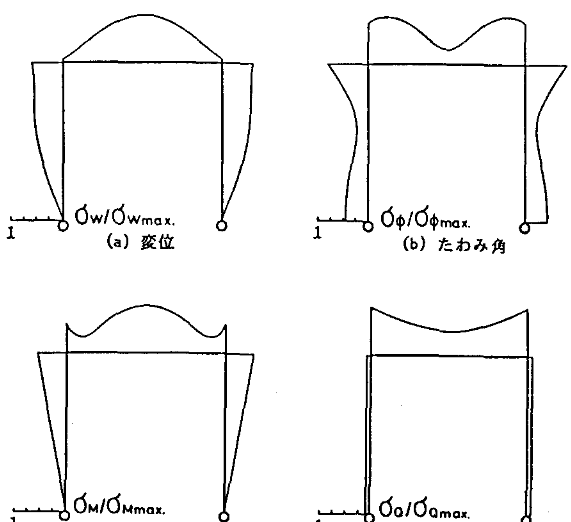
数値解析例として、門型及び屋根型ラーメンに不規則分布荷重が作用した場合を考える。荷重モデルとして、白色雑音過程を仮定している。ここでは、図－4に示したような支点がヒンジの門型ラーメンの解析結果を示した。計算では、軸力による変形を抑えるために、断面積を大きくしている。



図－4　不規則分布荷重

計算結果は、変位、たわみ角、曲げモーメントの標準偏差をそれぞれの最大値で基準化した値で示したものである。等分布荷重を載荷させたとき、応答が最大あるいは最小となる点で、変動も大きな値を示し、また等分布荷重で応答が0となる点で、応答の標準偏差は極小となることがわかる。

確率伝達マトリックス法によれば、直列型の剛節構造であれば、節点マトリックスで状態変数を接続することにより、マトリックス演算を基本にした算法で解析できる。また、この解は、ほぼ厳密解と考えて良いものである。



図－5　応答の標準偏差

<参考文献>(1)岡林，土木学会論文報告集，第316号，1981年12月　(2)岡林、他，土木学会論文報告集，第341号，1984年1月