

不規則分布荷重を受ける板の有限要素解析

長崎大学工学部 学生員 ○山手 弘之

長崎大学工学部 正員 岡林 隆敏

1. はじめに 構造物の信頼性を評価するためには、まず、道路橋の活荷重や事務所、倉庫の積載荷重あるいは雪荷重等、空間的に不規則に分布した外力に対する静的な不規則応答解析が必要になってくる。静的不規則問題の解析法には、Green関数法¹⁾や確率伝達マトリクス法²⁾³⁾があるが、これらの解法は、はり状の構造物には適しているが、複雑な構造物や板の解析には限界がある。著者らは先に、このような問題の汎用的な解法として確率有限要素法を提示し、この手法が骨組構造物の解析に対し有効であることを示した⁴⁾。本報告では、この解法を不規則な分布荷重が作用する平板の曲げ問題に適用し、応答の分散及び共分散を求めるための諸式を誘導するとともに、いくつかの数値計算例を示すものである。

2. 有限要素法の概要⁵⁾ 本研究では矩形要素を用い、各節点には3個の未知変位、たわみ w と x 、 y 軸まわりのたわみ角 ϕ_x 、 ϕ_y を導入する。節点変位ベクトルを $\mathbf{X}$ 、節点荷重ベクトルを $\mathbf{F}$ とすると、節点方程式は

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1)$$

で与えられる。 $\mathbf{K}$ は構造全体の剛性マトリクスである。この式に境界条件の処理を施すと、変位 $\mathbf{X}$ が求まる。曲げモーメント M_x 、 M_y 及びねじりモーメント M_{xy} はひずみ-変位、応力-ひずみの関係式より

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{U} \quad (2)$$

と表せる。ここに、 $\mathbf{M} = \{M_i, M_j, M_k, M_l\}^T$ ($M_i = \{M_{xi}, M_{yi}, M_{xyi}\}^T$)、 $\mathbf{U}$ は各要素における節点の変位をひとつにまとめたベクトルであり、式(1)で求めた $\mathbf{X}$ の成分として得られる。 $\mathbf{D}$ は各節点における内部モーメントを与える応力マトリクスである。

3. 確率有限要素法 式(1)において外力 $\mathbf{F}$ が確率変数であると変位 $\mathbf{X}$ も確率変数となる。さらに、式(2)より $\mathbf{M}$ も確率変数となる。

(a) 平均値応答 平均値は式(1)(2)の両辺に平均操作($E[\]$)を施すと得られる。

$$E[\mathbf{K}\mathbf{X}] = E[\mathbf{F}] \quad (3)$$

$$E[\mathbf{M}] = \mathbf{D}E[\mathbf{U}] \quad (4)$$

平均値応答は、等分布荷重による平板の曲げ解析に一致し、確定論的な有限要素法によって得られる。

(b) 分散、共分散応答 確率変数 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{M}$ は一般に平均値とそのまわりの変動に分離できる。

$$\mathbf{F} = E[\mathbf{F}] + \hat{\mathbf{F}} \quad (5)$$

$$\mathbf{X} = E[\mathbf{X}] + \hat{\mathbf{X}} \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = E[\mathbf{M}] + \hat{\mathbf{M}} \quad (7)$$

ここに、 $\hat{}$ の記号は平均値まわりの変動を表す。

ここで式(1)(5)(6)を用いて荷重の分散、共分散を構成すると、確率有限要素法の基礎式が次のように得られる。

$$\mathbf{K}E[\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}^T]\mathbf{K}^T = E[\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{F}}^T] \quad (8)$$

この式の右辺に荷重の分散、共分散 $E[\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{F}}^T]$ を与えると変位の分散、共分散 $E[\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}^T]$ が求まる。曲げ及びねじりモーメントの分散、共分散

$$E[\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^T] = \mathbf{D}E[\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T]\mathbf{D}^T \quad (9)$$

により得られる。ここに、 $E[\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^T]$ は式(8)で得た $E[\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}^T]$ の成分から構成される各要素の変位の分散、共分散マトリクスである。

4. 荷重の分散、共分散行列

荷重の分散、

共分散行列は、

$$E[\hat{P}_i^2] \text{ と } E[\hat{P}_i\hat{P}_j]$$

の要素から構成される。図1に不規則分布荷重が載荷する平板の様子を示した。本研究では不規則分布荷重

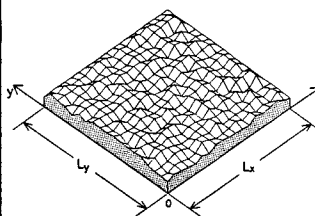


図1 不規則分布荷重を受ける平板

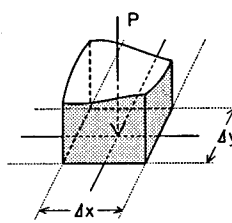


図2 荷重のモデル化

$q(x, y)$ は x 方向と y 方向が互いに独立であると仮定する。したがって $q(x, y) = q_x(x)q_y(y)$ となる。さらに、分布荷重は図2に示すように各節点に作用する集中荷重としてモデル化する。したがって、

$$\hat{P}_i = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} q_x(x_i + x) dx \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} q_y(y_i + y) dy \quad (10)$$

となる。ここに、 x_i, y_i は節点 i の座標値である。
 P_i と P_j の共分散は次式で与えられる。

$$E[\hat{P}_i \hat{P}_j] = \int_{-AX/2}^{AX/2} \int_{-AY/2}^{AY/2} E[q_x(x_i+x_1)q_x(x_j+x_2)] dx_1 dx_2 \\ + \int_{-AY/2}^{AY/2} \int_{-AY/2}^{AY/2} E[q_y(y_i+y_1)q_y(y_j+y_2)] dy_1 dy_2 \quad (11)$$

i) 白色雑音過程の場合

$$E[q_x(x_1)q_x(x_2)] = \sigma_x^2 \delta(x_1 - x_2)$$

$$E[q_y(y_1)q_y(y_2)] = \sigma_y^2 \delta(y_1 - y_2)$$

$$E[\hat{P}_i^2] = \sigma_x^2 \sigma_y^2 X \cdot Y, E[\hat{P}_i \hat{P}_j] = 0$$

5. 数値計算と考察

解析モデルとし

て全周固定の正方形板と全周単純支持正方形板を考え、いずれも等方等質な材料から成るとする。解析に当っては、各辺を10分割した100要素で計算し、着目点を $y=L_y/2$ の断面にとる。図3、図4はそれぞれ固定板、単純支持板に白色雑音過程でモデル化された荷重が作用した場合の、着目断面におけるたわみ(a) たわみ角(b) 曲げモーメント(c) の変動の様子を示したものである。図5、図6は相関のある荷重が作用した場合の固定板と単純支持板の各応答を示したものである。図中の k は相関の減衰を表すパラメータであり式(15)中の β とは $k = \beta/2\pi$ の関係にある。この k が0に近づくとき荷重の変動はゆるやかになり、荷重強度が不規則な等分布荷重に近づく。逆に $k \rightarrow \infty$ のときは荷重は激しく変動し白色雑音過程の場合に漸近する。ただし、荷重モデルは k の変化に関係なくパワーを一定としているので、 k が大きくなるにつれ応答形状は図3、図4の結果に近づくが、応答のレベルは低下することになる。

本解法を用いれば、平板の問題に対しても煩雑な計算を行うことなく、不規則応答解析を効果的に実行できることが確認できた。

<参考文献>

- (1)高岡他:土木学会論文, No. 334, 1983. 6
- (2)岡林:土木学会論文, No. 316, 1981. 12
- (3)岡林他:土木学会論文, No. 341, 1984. 1
- (4)岡林他:構造工学論文, Vol. 32A, 1986. 3(掲載予定)
- (5)Zienkiewicz, Cheung(吉識雅夫監訳):マトリクス有限要素法, 培風館, 1970

ii) 相関を有する確率過程の場合 式(11)の x に関する二重積分の結果(I で表す)のみを示すと、

$$E[q_x(x_1)q_x(x_2)] = \sigma_x^2 e^{-\beta_x |x_1 - x_2|} \quad (15)$$

$x_i = x_j$ のとき

$$I = 2\sigma_x^2 \{4X - (1 - e^{-\beta_x 4X})/\beta_x\}/\beta_x \quad (16)$$

$x_i \neq x_j$ のとき

$$I = 2\sigma_x^2 e^{-\beta_x |x_i - x_j|} (\cosh \beta_x 4X - 1)/\beta_x \quad (17)$$

となる。式(15)~(17)は y についても類似の結果が得られるから ii) の場合の $E[\hat{P}_i^2]$ 、 $E[\hat{P}_i \hat{P}_j]$ は式(16)(17)の組合せとして求めることができる。

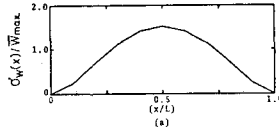


図3 固定板の標準偏差応答
(白色雑音過程の場合)

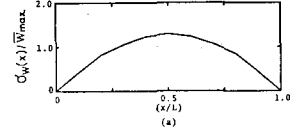
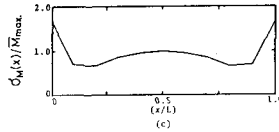
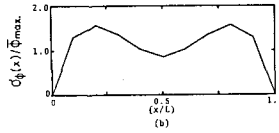


図4 単純支持板の標準偏差応答
(白色雑音過程の場合)

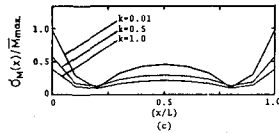
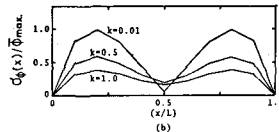
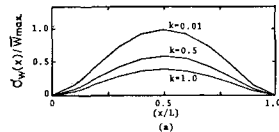
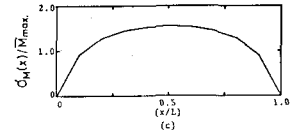
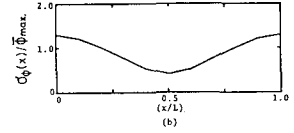


図5 固定板の標準偏差応答
(相関を有する確率過程の場合)

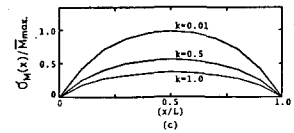
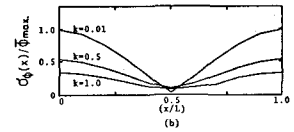
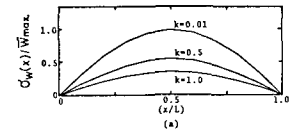


図6 単純支持板の標準偏差応答
(相関を有する確率過程の場合)