

λ -Matrix を用いた一部修正された非減衰系の固有値解析

熊本大学 正 員 平井一男 ○ 学生員 片山拓朗
 八代高専 正 員 水田洋司 内山義博

1) まえがき : 着者は、剛性行列, K と質量行列, M からなる振動系 (System A, 自由度 N) の一部に修正が生じた時、修正系 (System B, 自由度 N) の動特性 (固有振動数, 固有モード) を System A の動特性を用いて求める方法を提案して来た⁽¹⁾。そこでは、System B が自由振動している状態を System A が周期外力を受け強制振動している状態と考え、System B の振動数方程式を得ている。その方程式は修正部分 (自由度 N) に相当する行列で表わす事ができるものであるが、方程式が有理関数となるため、方程式を解く手法が問題となる。ここでは方程式を解く手法を提案する。

2) System B の振動数方程式

一般に、System A, B の振動数方程式は

$$\begin{aligned}\Delta_a(\lambda) &= \det\{K - \lambda M\} \\ &= (\lambda_1^a - \lambda)(\lambda_2^a - \lambda) \cdots (\lambda_N^a - \lambda) \\ &= h_0 \lambda + h_1 \lambda^2 + \cdots + h_{N-1} \lambda^N + h_N \lambda^{N+1} \quad (1) \\ \Delta_b(\lambda) &= \det\{K + \Delta K - \lambda(M + \Delta M)\} \\ &= (\lambda_1^b - \lambda)(\lambda_2^b - \lambda) \cdots (\lambda_N^b - \lambda) \quad (2)\end{aligned}$$

となる。ここに λ^a, λ^b は各 System の固有値で、 $\Delta K, \Delta M$ は剛性行列と質量行列の変化量である。

文献⁽¹⁾で示される System B の振動数方程式は、

$$\begin{aligned}\det\{D(\lambda)\} &= 0 \text{ or } \det\{\bar{D}(\lambda)\} = 0 \quad (3) \\ D(\lambda) &= I + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_d(\lambda) \quad (4) \\ \bar{D}(\lambda) &= I + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_a(\lambda) \quad (5)\end{aligned}$$

である。ここに f_d は外力の振動数を、 $\Delta K, \Delta M$ は、 $\Delta K, \Delta M$ から 0 要素の列および行ベクトルを除いた縮小行列を表わす。ただし $\lambda \neq \lambda_n^a$ である。 $f_d(\lambda)$ は、System A の動特性行列であり、 $f_d(\lambda)$ の i 行 j 列要素 $f_{dij}(\lambda)$ は System A の動特性を用いて

$$f_{dij}(\lambda) = \sum (\lambda_n^a - \lambda)^{-1} \phi_{in} \phi_{jn} \quad (6)$$

と表わせる。ここに $\phi_n = [\phi_{1n}, \phi_{2n}, \dots, \phi_{Nn}]^T$ は、System A の N 次の固有ベクトルである。(1), (2) 式より

$$\begin{aligned}\det\{D(\lambda)\} &= \frac{\det\{K + \Delta K - \lambda(M + \Delta M)\}}{\det\{K - \lambda M\}} \\ &= \Delta_b(\lambda) / \Delta_a(\lambda) \quad (7)\end{aligned}$$

となり、2つの多項式からなる有理関数であり、 λ_n^a で不連続となる。又、 $D(\lambda)$ と同様に修正部分 $\bar{D}(\lambda)$ の行列式も (7) 式の形に書ける事は明らかである。

3) λ -Matrix を用いた特異点除去

(6) 式から、 λ_n^a は $f_{dij}(\lambda)$ の一位の極であり、 $f_d(\lambda)$ は (8) 式の様に表わす事ができる。ここに $G(\lambda)$ は $N-1$ 次の λ -Matrix となり、 λ_n^a で連続である。 $B_k, k=1, N-1$

$$f_d(\lambda) = G(\lambda) / \Delta_a(\lambda) \quad (8)$$

$$G(\lambda) = B_{N-1} \lambda^{N-1} + B_{N-2} \lambda^{N-2} + \cdots + B_1 \lambda + B_0 \quad (9)$$

は N 次の実係数正定行列となる。 $f_d(\lambda)$ と同様に $\bar{D}(\lambda)$ は

$$\bar{D}(\lambda) = T(\lambda) / \Delta_a(\lambda) \quad (10)$$

$$T(\lambda) = A_N \lambda^N + A_{N-1} \lambda^{N-1} + \cdots + A_1 \lambda + A_0 \quad (11)$$

となり、 $T(\lambda)$ は N 次の λ -Matrix となる。ここに $A_k, k=0, N$ は N 次の実係数正定行列であり、

$$\begin{cases} A_N = h_N I + \Delta M G \\ A_k = h_k I + \Delta K G_k + \Delta M G_{k-1} \quad k=1, N-1 \\ A_0 = h_0 I + \Delta K G_0 \end{cases} \quad (12)$$

と表わせる。(10) 式から (3) が成立するためには、

$$\det\{T(\lambda)\} = 0 \quad (13)$$

が成立しなければならない。一般に (13) 式は λ に関する N 次の多項方程式となり、 N 個の根が存在する。従って (13) 式の根の構成が問題となる。(7), (10) 式より $\det\{T(\lambda)\}$ は次の様に因数分解される。

$$\begin{aligned}\det\{T(\lambda)\} &= \{\Delta_a(\lambda) \Delta_b(\lambda)\} \\ &= (\lambda_1^a - \lambda)^{N-1} (\lambda_2^a - \lambda)^{N-1} \cdots (\lambda_N^a - \lambda)^{N-1} \\ &\quad \times (\lambda_1^b - \lambda)(\lambda_2^b - \lambda) \cdots (\lambda_N^b - \lambda) \quad (14)\end{aligned}$$

よって (13) 式は λ_n^a を $N-1$ 重根として持つ事がわかる。 λ_n^a は既に求められているから、deflation によって (13) 式の根から除外する事ができる。又、(13) 式は、不連続点のない正則関数として取り扱う事ができる。

4) LT-algorithm の適用⁽²⁾

Lancaster は Laguerre 法と Trace 理論を (13) 式の解法に適用した。その反復式は (15), (16) 式で示される。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{N-S}{\alpha_k \pm \sqrt{(N-S-1)\{(N-S)\beta_k - \alpha_k^2\}}} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= \text{trace}\{T_k^{-1} T_k^{(1)}\} - (N-1) \times P_1 - \sum (\lambda - \lambda_n)^{-1} \\ \beta_k &= \text{trace}\{(T_k^{-1} T_k^{(1)})^2 - T_k^{-1} T_k^{(2)}\} - (N-1) \times P_2 \\ &\quad - \sum (\lambda - \lambda_n)^{-2} \\ P_1 &= \sum (\lambda - \lambda_n^a)^{-1}, \quad P_2 = \sum (\lambda - \lambda_n^a)^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

この反復式は deflation によって、既に値が求められている根 ($\lambda_n^a \sim \lambda_n^b$, $\lambda_n^b \sim \lambda_n^c$) の収束を助いたものである。ここに λ は既に求められている System B の固有値の数を示す。

ところで、理論的には係数行列 B_n , A_n は求める事ができるが、事実上、不可能である。しかし必要なのは、各ステップにおける $T(\lambda)$ の値である。従って (16) 式から各ステップにおける $T(\lambda)$ の値は、

$$\left. \begin{aligned} T^{(1)}(\lambda) &= D^{(1)}(\lambda) / \Delta_a(\lambda) \\ T^{(2)}(\lambda) &= \Delta_a^{(1)}(\lambda) D^{(1)}(\lambda) + \Delta_a(\lambda) D^{(2)}(\lambda) \\ T^{(3)}(\lambda) &= \Delta_a^{(2)}(\lambda) D^{(1)}(\lambda) + 2\Delta_a^{(1)}(\lambda) D^{(2)}(\lambda) \\ &\quad + \Delta_a(\lambda) D^{(3)}(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を求める事ができる。ここに (16) は λ による階微分を表わす。(17) 式の行列の微分は以下の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} D^{(1)}(\lambda) &= -\Delta M f_a(\lambda) + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_a^{(1)}(\lambda) \\ D^{(2)}(\lambda) &= -2\Delta M f_a^{(1)}(\lambda) + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_a^{(2)}(\lambda) \\ f_a^{(1)}(\lambda) &= \sum (\lambda_n - \lambda)^{-2} \phi_{in} \phi_{jn} \\ f_a^{(2)}(\lambda) &= 2 \sum (\lambda_n - \lambda)^{-3} \phi_{in} \phi_{jn} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(17), (18) 式より α_n , β_n は (19) 式の様になる。なお (15) 式の分母の符号は分母の絶対値が大きくなる符号を取る。(19) 式の計算は修正部の自由度に等しい次数の行列の計算で行う事ができる。固有値が求めれば、文献(1)に示される方法で固有ベクトルは求める事ができる。

表-2 固有振動数の比較

NO	QR-method		Propose-method ($\epsilon = 1.0E-6$)			
	FREQUENCY SYSTEM-A	SYSTEM-B	FREQUENCY $\lambda_0 = 0.159E+1$	CYCLE	FREQUENCY	INITIAL CYCLE (λ_0)
1	0.408508E+1	0.432620E+1	0.432620E+1	4	0.432620E+1	0.159E+1
2	0.736893E+1	0.765301E+1	0.765301E+1	4	0.765301E+1	0.751E+1
3	0.118181E+2	0.117621E+2	0.117621E+2	4	0.117621E+2	0.120E+2
4	0.178078E+2	0.184815E+2	0.184815E+2	5	0.184815E+2	0.178E+2
5	0.205477E+2	0.211628E+2	0.211628E+2	4	0.211628E+2	0.211E+2
6	0.260810E+2	0.264998E+2	0.264998E+2	5	0.264998E+2	0.266E+2
7	0.285078E+2	0.301743E+2	0.301743E+2	5	0.301743E+2	0.289E+2
8	0.312042E+2	0.318829E+2	0.318829E+2	4	0.318829E+2	0.327E+2
9	0.386093E+2	0.395759E+2	0.395759E+2	5	0.395759E+2	0.392E+2
10	0.402100E+2	0.417022E+2	0.417022E+2	5	0.417022E+2	0.411E+2
11	0.406686E+2	0.428648E+2	0.428648E+2	4	0.428648E+2	0.421E+2
12	0.502415E+2	0.503061E+2	0.503061E+2	5	0.503061E+2	0.529E+2
13	0.515895E+2	0.516000E+2	0.516000E+2	4	0.516000E+2	0.520E+2
14	0.555918E+2	0.563503E+2	0.563503E+2	4	0.563503E+2	0.544E+2
15	0.610582E+2	0.642793E+2	0.642793E+2	3	0.642793E+2	0.617E+2

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= \text{trace}\{D_k^{-1} D_k^{(1)}\} - \sum (\lambda - \lambda_n^b)^{-1} + P_1 \\ \beta_k &= \text{trace}\{(D_k^{-1} D_k^{(1)})^2 - D_k^{-1} D_k^{(2)}\} - \sum (\lambda - \lambda_n^b)^{-2} \\ &\quad + P_2 \\ (\lambda_k - \lambda_k) / \lambda_k &\leq \epsilon \quad \text{if } \lambda_k > \epsilon \\ \lambda_k - \lambda_k &\leq \epsilon \quad \text{if } \lambda_k \leq \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (19) \quad (20)$$

5) 数値計算

数値計算は図1に示すモデルを System A とし、4, 5 質点の質量と

4-5 部材の断面積が共に $\frac{1}{4}$ に減小した系を System B として解析した。

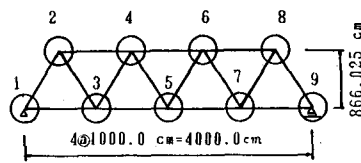
表1には System A の諸元を示す。

System A の固有

値解析には QR 法を用い、倍精度計算で行なった。

提案法は単精度計算で行い、初期値 λ_0 を固定した場合と、 λ_n の近傍に取った場合について行った。表2は各 System の固有振動数と反復回数を比較している。結果の詳細は当日、発表する予定である。

<参考文献> (1) J. Hirai, 'On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures'. Intern-jour-numeri-method-Engi-. (1973)
(2) P. Lancaster, 'Lambda-matrix and vibrating systems'. Pergamon press inc, (1966)



$$A = 30.0 \text{ cm}^2 \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

図1 平面トラス

表1 トラス諸元

質点	X (cm)	Y (cm)	質量 kg·s/c
1	0.0	0.0	2.55
2	500.0	866.025	1.02
3	1000.0	0.0	5.10
4	1500.0	866.025	2.04
5	2000.0	0.0	5.10
6	2500.0	866.025	2.04
7	3000.0	0.0	5.10
8	3500.0	866.025	1.02
9	4000.0	0.0	2.55

(3) A.M. Ostrowski 'Solution of Equations and Systems of Equations', second Edition. Academic press. (1966)