

幾何学的非線形性を考慮した初期変形をもつ長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員○浦川重男

長崎大学工学部 学生員 川野隆太

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 長方形板に面内変動曲げモーメントが作用すると、面外振動が生ずる¹⁾。この問題に関して、係数励振振動(動的安定性)の立場から、その面外不安定振動の発生条件¹⁾および安定を失った後の振幅²⁾を各種のパラメーターのもとに明確にしてきた。実際の板構造を考える場合、面外変形に重要な影響を及ぼすものとして、板の初期変形³⁾がある。したがって、初期変形が面外不安定振動に及ぼす影響を評価しておく必要がある。そこで、本研究では板の初期変形の形状、大きさが面外不安定振動の発生領域、振幅に及ぼす影響を評価した結果を報告するものである。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示すような長方形板の面内方向に、曲げモーメント $M=M_0+M_1 \cos \Omega t$ が作用する。こ

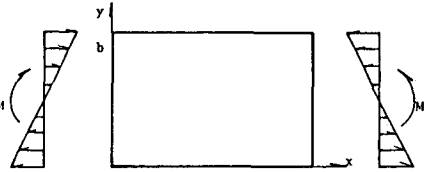


図-1 一般図

のとき、初期変形 w_0 をもつ長方形板の運動方程式は、Marguerreの式を用いて、次のように表される。

$$\mathcal{L}(w)F = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^2 w - \frac{c}{d} (1 - 2\nu) \left(M_0 + M_1 \cos \Omega t \right) \frac{\partial w}{\partial x^2} - d \left\{ \frac{\partial F}{\partial y^2} \frac{\partial (w + u_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x^2} \frac{\partial (w + u_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \frac{\partial (w + u_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left[\frac{\partial (w + u_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial (w + u_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial (w + u_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial u_0}{\partial x^2} \frac{\partial u_0}{\partial y^2} \right\} \right\} \quad (2)$$

ここに、 x, y :直交座標系、 d :板厚、 ρ :板の密度、 c :減衰係数、 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$:板剛度、 E :ヤング率、 ν :ポアソン比、 w :面外変形、 F :Airyの応力関数、 M_0 :初期曲げモーメント、 M_1 :変動曲げモーメントの振幅、 Ω :励振円振動数

板の境界条件は、曲げに対して全周辺単純支持、面内変位に対して固定とする。

3. 解法 式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = d \sum_{m,n} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (3)$$

ここに、 T_{mn} :未知の時間関数、 W_{mn} :境界条件を満足する座標関数 $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 、 M, n : x, y 方向の半波数
初期変形も与えられた境界条件を満足するように、次のように仮定する。

$$u_0 = e_0 d W(x, y) \quad (4)$$

ここに、 e_0 :板厚で無次元化された初期変形の大きさ、 W :初期変形の形状 $\sin \frac{G\pi x}{a} \sin \frac{H\pi y}{b}$ 、 G, H :初期変形の x, y の半波数。

式(3)、(4)を式(2)に代入して、応力関数 F を決定したのち、式(1)にGalerkin法を適用すれば、次のような一般座標 T_{MNP} に対する運動方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{MNP} + 2H_M \left(\frac{u_0}{d} \right) \dot{T}_{MNP} + \left(\frac{u_0}{d} \right)^2 T_{MNP} + (M_0 + M_1 \cos \bar{\omega} t) \sum_{k,l} A_{MNP} T_{kln} + \sum_{k,l} \sum_{r,s} B_{MNP} T_{kln} T_{rsl} + e_0 \sum_{k,l} H_{MNP} T_{kln} T_{rsl} + e_0^2 \sum_{k,l} F_n T_{kln} = 0 \quad (5)$$

ここに、 A_{MNP} 、 B_{MNP} 、 H_{MNP} 、 F_n :Galerkin法の積分項、 M_0 、 M_1 、 $\bar{\omega}$:パラメーター

式(5)より明らかなように、初期変形の影響は、線形項に2次のオーダー、非線形項に1次のオーダーで効いてくる。

4. 解析結果 式(5)において、初期変形を支配するパラメーターは初期変形の形状(G, H)と大きさ e_0 の2個である。式(5)をこれらのパラメーターのもとに時間応答解析をすれば、動的安定性に及ぼす初期変形の影

響を評価することができる。

(1) 固有振動数 図-2は正方形板 ($\mu=1.0$, $\bar{H}_0=0.0$)を対象に初期変形の大きさ e_0 と無次元固有振動数 $\bar{\omega}$ との関係を初期変形の形状(G, H)をパラメーターに示したものである。一般に、初期変形の大きさ e_0 が増加するとともに、固有振動数 $\bar{\omega}$ が増大する。その割合は、初期変形の形状(G, H)に依存する。初期変形の形状(G, H)と振動の振動形(M, s)、 M : x 方向の半波数、 s : y 方向の半波数)が一致した場合に最も大きくなる。

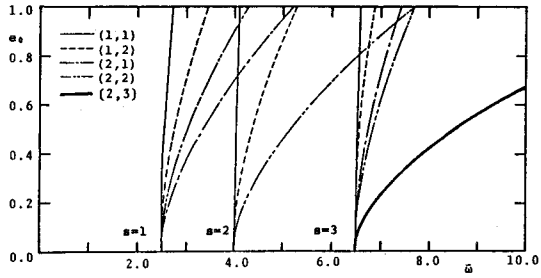


図-2 無次元固有振動数 ($M=2$)

(2) 面外不安定領域 式(5)の非線形項を無視して、不安定領域に及ぼす初期変形の影響を評価する。図-3,4は正方形板 ($\mu=1.0$)の面外不安定領域のうち、結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ に及ぼす初期変形の大きさ e_0 と初期変形の形状(G, H)の影響を示したものである。図中において、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元加振振動数を、縦軸 R_t は無次元変動曲げモーメントの振幅である。図-3より、初期変形が大きくなると、不安定領域は高い振動数領域側に移動し、その不安定領域はやや狭くなる。図-4より、初期変形の形状(G, H)も不安定領域に影響を及ぼし、高い固有振動数の和をもつ場合ほど、その幅は狭くなる。

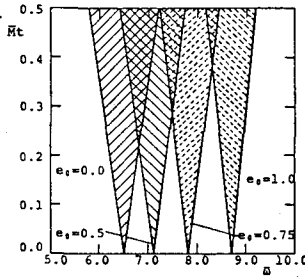


図-3 不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($G=2, H=2$)

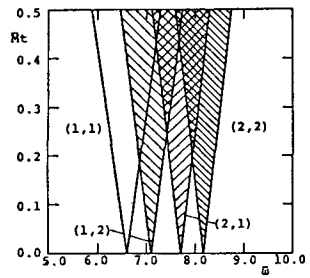


図-4 不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($e_0=0.4$)

(3) 最大振幅

図-5は最大振幅 A と変動曲げモーメントの振幅 R_t との関係を初期変形の大きさ e_0 をパラメーターに示すものである。初期変形の大きさ e_0 の増加とともに最大応答 A は増大する。図-6は、結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の最大振幅 A と変動曲げモーメントの振幅 R_t との関係を初期変形の形状(G, H)をパラメーターに示したものである。この図より、最大振幅 A は初期変形の x 方向の半波数 G と振動波形の半波数 M が一致した場合に大きくなる。

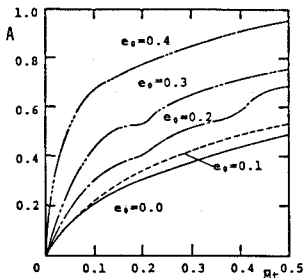


図-5 最大応答 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($G=2, H=2$)

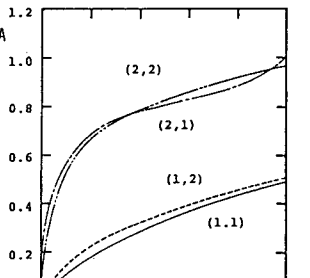


図-6 最大応答 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($e_0=0.4$)

図-7は初期変形がある場合の時間応答の波形を示したものである。非対称な復元力をもつ2次の非線形項が初期変形の存在のために含まれる。このために、時間応答波形は上下の振幅が大きく異なる。このために、一般にみかけ上、最大の振幅が増大する。

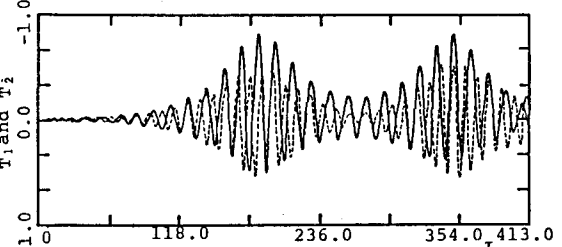


図-7 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の非線形時間応答 ($e_0=0.4, G=2, H=2, \bar{H}_1=0.3, \bar{\omega}=7.35$)

5. まとめ 初期変形と初期曲げモーメントなどのパラメーターの影響については講演時に発表する。

参考文献 1)高橋・田川・池田・松川:土木学会論文報告集, 第341号, 1984, pp.179~186, 2)高橋・池田・川野:構造工学論文集 Vol.32A 1986, 3)前田・大倉:土木学会論文報告集, 第319号, 1982, pp.1~12