

薄肉開断面部材の断面変形を考慮した弾性安定解析

九州大学工学部 学生員 丸山 義一

九州大学工学部 正会員 彦坂 照

九州大学工学部 学生員 井上 元

1、緒 言

薄肉断面部材に関する既往の微小変位曲げねじり理論、有限変位理論および座屈理論は、断面形状不変と根本仮定としている。本研究は、任意形薄肉開断面をもつ部材が任意荷重を受ける場合について、断面形状の変化を考慮した有限変位理論と新たに提示し、断面変形が部材の不安定挙動に及ぼす影響を解析するものである。但し、本報では部材の幾何学的非線形性のみを考慮し、材料の非線形性は考えないものとする。

2、断面変形の定義と変位関数

図-1のようにN枚の薄板要素からなる多角形開断面部材を考え、図心Cを原点とする断面主軸 x, y と図心を連ねる部材軸 z からなる右手系直交座標を定める。部材上任意点の変位は、変形前の x, y, z 方向に関する成分 u, v, w で表わす。 (x, y) 座標とは別に、部材断面上の1点Dを原点とし板厚中心線に一致する曲線座標 s と、その法線方向座標 n とを定め、板厚 t は s の関数とする。

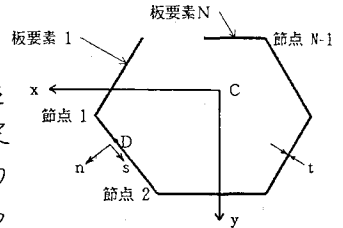
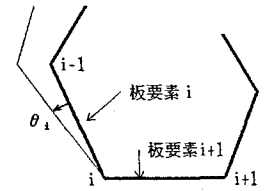


図-1 座 標 系

本研究では、部材を構成する板要素の節点が $x-y$ 面内で相対変位を起す状態を、断面変形と定義する。このとき各板要素には面外曲げが生じるが、板要素の部材軸直角方向伸縮は無視する。N枚の板要素から構成される開断面部材の断面変形の自由度は $N-1$ であり、 $N-1$ 個の断面変形は、図-2のように板要素 $i+1$ に対して板要素 i が反時計回りになす相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$)で定義する。回転角 θ_i による部材断面上任意点の変位関数 u, v は、変位の3次以上の項を無視するとき、次式で表わされる。

図-2 断面変形 θ_i の定義

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \phi - \frac{1}{2} (x - x_s) \phi^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (x - x_i) \left(\phi + \frac{\theta_i}{2} \right) + (y - y_i) \right\} \theta_i \mu_i \\ v &= v_s + (x - x_s) \phi - \frac{1}{2} (y - y_s) \phi^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (x - x_i) - (y - y_i) \left(\phi + \frac{\theta_i}{2} \right) \right\} \theta_i \mu_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 u_s, v_s は断面のせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の x, y 方向変位、 ϕ は z 軸回りの回転角、 $\mu_i(s) = \begin{cases} 1 & (s \leq s_i) \\ 0 & (s > s_i) \end{cases}$

薄肉開断面部材における慣用に従い、板厚中心面のせん断ひずみ $\gamma_{zs}^* = 0$ と置いて s で積分すれば、変位関数 w が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_s - (u_s' + v_s' \phi) x - (v_s' - u_s' \phi) y + \omega(s) \phi' + \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i(s) \theta_i' \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \theta_i \left[\{ (y - y_i) \mu_i + y_i \mu_{i,c} \} u_s' - \{ (x - x_i) \mu_i + x_i \mu_{i,c} \} v_s' + \lambda_i(s) \phi' + \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}(s) \theta_j' \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $w_s, \mu_{i,c}$ は図心Cの w および μ_i の値、 $\omega(s)$ はねじりの単位そり関数、 $\phi_i(s), \lambda_i(s)$ および $K_{ij}(s)$ は断面の形状寸法より定まる s の関数である。但し、 $K_{ij}(s)$ は $i \neq j$ の場合のみ定義され、 $i = j$ のとき $K_{ij}(s) = 0$ とする。

3、部材の応力とつり合い方程式

(1) z 軸方向直応力: $\sigma_z = E \varepsilon_z = E \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (3)$

(2) St. Venantのねじりによるせん断応力: $\tau_{zs} = G \gamma_{zs} = G \cdot 2\pi \left(\phi' + \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \theta_i' \right) \quad (4)$

(3) 板要素の部材軸直角方向曲げ応力:

断面変形 θ_i に伴って生じる板要素の部材軸直角方向曲げモーメントを単位長当り M_i とすれば

$$M_s = \sum_{i=1}^N M_i \theta_i$$

ここに、 M_i は $\theta_i=1$ のみにより生じる曲げモーメント。 M_s による応力は、 $I_s = \frac{1}{12}$ を用いて

$$\sigma_s = E \varepsilon_s = \frac{M_s}{I_s} \cdot y \quad (5)$$

(4) つり合い方程式：長さ L の部材に作用する単位体積当りの外力の x, y, z 方向成分を P_x, P_y, P_z とし、部材両端($z=0, L$)断面に作用する単位面積当りの外力の x, y, z 方向成分を $\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z$ とすれば、式(3)~(5)の応力とひずみを用いて、断面変形を考慮した部材のつり合い方程式が次の仮想変位の原理より導かれる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_z \delta \varepsilon_z) dA dz \\ & = \int_0^L \int_A (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dA dz + [n_x \int_A (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dA]_0^L \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

但し、 $z=0$ で $n_z=-1$ ， $z=L$ で $n_z=1$

4. 部材の弾性安定問題への応用

図-3のように、断面変形の自由度が4の一軸対称断面をもつ長さ L 、両端単純支持のハット形断面部材が、 x 軸まわりの一定曲げモーメント M_0 と受ける場合の弾性座屈問題に、本理論を適用する。このとき式(6)より次のようなつり合い方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u'''' + M_0 \phi'' + \sum_{j=1}^4 (-EH_{jy} \theta_j'' + M_{xj}^{(0)} \theta_j'') &= 0 \\ EI_x v'''' - \sum_{j=1}^4 (EH_{jx} \theta_j'' + M_{yj}^{(0)} \theta_j'') &= 0 \\ EI_w \phi'''' - (GJ + K^{(0)}) \phi'' + M_0 u'' + \sum_{j=1}^4 \{EH_{jw} \theta_j'' - (GJ_j + L_j^{(0)}) \theta_j'\} &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 \{EI_{jz} \theta_j'' - \{GJ_{jz} + K_{jz}^{(0)} - \frac{H_{jy}}{I_y} M_{xj}^{(0)} + \frac{H_{jx}}{I_x} M_{yj}^{(0)} - \frac{H_{jz}}{I_w} (GJ_j + L_j^{(0)})\} \theta_j' + f_{jz} \theta_j\} \\ + (M_{x1}^{(0)} - \frac{H_{1y}}{I_w} M_0) u'' - M_{y1}^{(0)} v'' + \{ \frac{H_{1y}}{I_w} (GJ + K^{(0)}) + \frac{H_{1y}}{I_y} M_0 - GJ_1 - L_1^{(0)} \} \phi'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

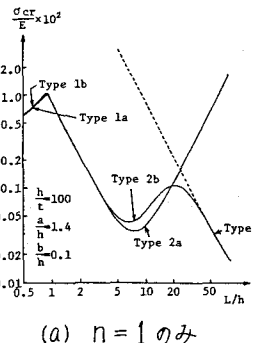
($i = 1, 2, 3, 4$)

この部材の対称および逆対称断面変形を伴う基本座屈モードとして図-4のType 1とType 2があり、それぞれ圧縮フランジの局部座屈およびウェブの横座屈と仮称する。これらがType 3の全体横倒れ座屈と連成して種々の座屈モードを生じることになる。式(7)の解を

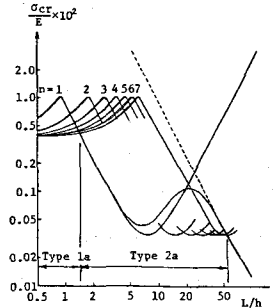
$$[u_s, v_s, \phi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T = [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7]^T \sin \frac{n\pi}{L} z \quad (8) \quad \text{図-4 座屈モード}$$

但し、 $C_1 \sim C_7$ は任意定数、 $n=1, 2, \dots, \infty$

で仮定すれば、座屈モーメント M_0 を求めるための固有値方程式を得る。図-5(a)では、座屈次数 $n=1$ のみに限り、図中に記す断面寸法の部材の座屈応力 σ_{cr} を、ウェブ高に対するスパン比 L/h の関数として両対数グラフにプロットした。但し、 M_0 の最小固有値を M_{cr} とし、 M_{cr} に対応する上フランジの曲げ応力を σ_{cr} とする。次数 n が増加すると、図-5(b)に示す通りType 1の局部座屈およびType 2のウェブ横座屈に対する σ_{cr} は、 $n=1$



(a) $n=1$ のみ



(b) $n=1 \sim 7$

図-5 上フランジの曲げ応力 σ_{cr} と L/h の関係

の σ_{cr} の最小値にそれぞれ漸近する。この例では、 $L/h < 1.5$ ではフランジの局部座屈、 $1.5 < L/h < 54$ ではウェブの横座屈が支配的であり、全体横倒れ座屈は $54 < L/h$ でなければ生じない。本論の手法によれば、 L/h の値と共に断面変形の影響が異なるため座屈モードがこのように複雑に変化する部材の弾性安定挙動を、比較的少ない自由度で解析できる。