板の曲げの解析に対する差分伝達マトリックス法の提唱

東海大学　正員　右田泰弘
東海大学　正員　遠田良喜

1. まえがき

板の曲げの解析に対する数値計算法は,数多く開発され,実用に供されている。そのうち,有限要素法(FEM)が最も広範囲に用いられているが,要素分割を多くするとすぐ未知量が増大し,容量の大きいコンピータを必要とする。また，差分法は，複雑な形状には適用しにくい欠点はあるが同一要素分割に対する未知量は,FEMより少なくてよく,有力な解法の一つである。

一方,伝達マトリックス法は,未知量が構造物の一端の自由度のみであり,コンピータの容量を大幅に節約できるので，有効な構造解析法であるが,板の曲げの問題のように偏微分方程式で支配される挙動には直接適用しがたい難点がある。

本報は，コンピータの容量の節約を目的として，差分法と伝達マトリックス法を組み合せた差分伝達マトリックス法(FDTM 法と略称する)を提唱し,板の曲げの解析を試みたものである。

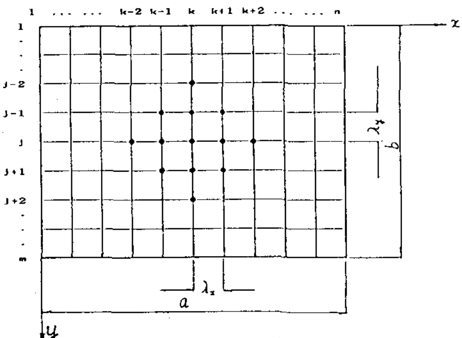

図-1.　要素分割

2.格間伝達マトリックスの誘導

板の曲げに対する基礎微分方程式

$\nabla^2 \nabla^2 w = q/D$　　∇^2 :Laplacian operator，　w:たわみ

q：単位面積当りの荷重，　D:板の曲げ剛性

は,図-1.のように長方形板をn×mに分割し，差分表示したものをk列目について,まとめてマトリックス表示すると,式(1)となる。

また,たわみ w のxに関する1,2,3 階の微分係数は,

式(2),(3),(4)と表すことができる。

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{W}_{k-2} + \mathbf{G}_2 \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{G}_3 \mathbf{W}_k + \mathbf{G}_2 \mathbf{W}_{k+1} + \mathbf{G}_1 \mathbf{W}_{k+2} = \mathbf{q}_k \quad \ldots.(1)$$

$$\mathbf{G}_4 \mathbf{W}_{k-1} + \lambda_x \mathbf{G}_5 \mathbf{W}'_k - \mathbf{G}_4 \mathbf{W}_{k+1} = 0 \quad \ldots.(2)$$

$$-\mathbf{G}_5 \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{G}_6 \mathbf{W}_k + \lambda_x^2 \mathbf{G}_5 \mathbf{W}''_k - \mathbf{G}_5 \mathbf{W}_{k+1} = 0 \quad \ldots.(3)$$

$$\mathbf{G}_4 \mathbf{W}_{k-2} - \mathbf{G}_5 \mathbf{W}_{k-1} + \lambda_x^3 \mathbf{G}_5 \mathbf{W}'''_k + \mathbf{G}_5 \mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{G}_4 \mathbf{W}_{k+2} = 0 \quad \ldots.(4)$$

ここで,$\mathbf{W}_k$ はk列目のたわみより成る列ベクトル,$\mathbf{W}'_k$，$\mathbf{W}''_k$，$\mathbf{W}'''_k$ はたわみの微分係数より成る列ベクトルである。

式(1)～(4)は，$\mathbf{W}_k^L = \{ \mathbf{W}, \mathbf{W}', \mathbf{W}'', \mathbf{W}''', 1 \}_k^L$ ，$\mathbf{X} = \{ \mathbf{W}_{k-2}, \mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{W}_{k+1}, \mathbf{W}_{k+2} \}$

とすると,まとめて,つぎのように表示できる。

$$\mathbf{G}\,\mathbf{X} = \mathbf{H}\,\mathbf{W}_k^L \quad \ldots.(5)$$

式(5)は，$\mathbf{X}$ に関する連立一次方程式である。k＋1列目につても同じ関係式（式(6)）が求められる。

$$\mathbf{G}^S \mathbf{X}^S = \mathbf{H}^S \mathbf{W}_{k+1}^S \quad \ldots.(6)$$

ここに,$\mathbf{W}_{k+1}^S = \{ \mathbf{W}_k, \mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{W}_{k+1}, \mathbf{W}_{k+2}, 1 \}$ ，$\mathbf{X}^S = \{ \mathbf{W}'_{k+1}, \mathbf{W}''_{k+1}, \mathbf{W}'''_{k+1}, \mathbf{W}_{k+3} \}$ である。ここで,$\mathbf{W}_k^R = \{ \mathbf{W}, \mathbf{W}', \mathbf{W}'', \mathbf{W}''', 1 \}_k^R$ として,式(5),(6)の結果を若干整理すると,

$$\mathbf{W}_k^R = \overline{\mathbf{F}}_k \mathbf{W}_k^L \quad \ldots(7)$$

という形にまとめられる。式(7)は,k列目とk＋1列目のたわみ，および,その微分係数を関係づけるものである。

つぎに，$\mathbf{M}_x$，$\mathbf{Q}_x$，を曲げモーメント,せん断力のベクトルとし,

$$\mathbf{V}_k^L = \{ \mathbf{W}, \mathbf{W}', \mathbf{M}_x, \mathbf{Q}_x, 1 \}_k^L \;,\quad \mathbf{V}_k^R = \{ \mathbf{W}, \mathbf{W}', \mathbf{M}_x, \mathbf{Q}_x, 1 \}_k^R$$

とすると,断面力とたわみ,および，その微分係数との間には,

$$\mathbf{V}_k^L = \mathbf{B}\,\mathbf{W}_k^L \;,\quad \mathbf{V}_k^R = \mathbf{B}\,\mathbf{W}_k^R \quad \ldots.(8)$$

で表される関係があるから,式(7),(8)より

$$\mathbf{V}_K^R = \mathbf{F}_K \ \mathbf{V}_K^L \quad , \text{ここに}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{B} \ \overline{\mathbf{F}} \ \mathbf{B} \quad \ldots. (9)$$

となり，ｋ番目の長方形要素群に対する格間伝達方程式を得る。

3.数値計算結果と考察

式(9)を用い，伝達マトリックスの解析手順[2),4),5)]で数値計算を行った。その結果の一部（ａ×ａの４辺単純支持の正方形板に等分布荷重満載）を表-1.に示した。精度は十分であろう。また，コンピュータの容量の節約を目的にして，FEMと伝達マトリックスを組み合せた有限要素伝達マトリックス(FETM)法も提唱されており，著者らもこれを用いて板の曲げの解析を試みた[4)]。これらのいくつかの解析法で必要とするマトリックスの大きさと未知数の数は表-2.に示すとおりである。

表-2.に示すように，ここに提唱するFDTM法は，必要なマトリックスの大きさ，未知数の数からして有利であり，今後有力な構造解析法の一つになりうると考える。

表-1. 数値計算結果

分割数 n×n	$w_{x=a/2,\,y=a/2}$						$(M_x)_{x=a/2,\,y=a/2}$			
	FEM[3)]		FETM[4)]		FDTM		FETM[4)]		FDTM	
	w	e_w	w	e_w	w	e_w	M_x	e_{Mx}	M_x	e_{Mx}
4×4	0.003939	2.3	0.003939	2.3	0.004028	0.8	0.04888	2.1	0.04570	4.6
6×6	――	――	0.004009	1.3	0.004048	0.3	0.04825	0.7	0.04688	2.1
8×8	0.004033	0.7	0.004032	0.7	0.004055	0.1	0.04807	0.4	0.04731	1.2
10×10	――	――	0.004043	0.4	0.004058	0.05	0.04799	0.2	0.04751	0.8
12×12	0.004050	0.2	0.004048	0.3	0.004060	0.0	0.04795	0.1	0.04763	0.6
14×14	――	――	0.004030	0.7	0.004060	0.0	0.04780	0.2	0.04770	0.4
16×16	0.004056	0.1	0.004053	0.2	0.004061	0.03	0.04790	0.0	0.04774	0.3
18×18	――	――	0.004083	0.6	0.004061	0.03	0.04804	0.3	0.04777	0.3
20×20	――	――	0.004062	0.05	0.004061	0.03	0.04797	0.2	0.04779	0.2
厳密解[1)]	$w_e = 0.00406$						$(M_x)_e = 0.0479$			
乗数	qa^2/D						qa^2			

表-2. マトリックスの大きさ，未知数の数

分割数 n×n	マトリックスの大きさ (総要素数)				未知数の数			
	FEM	FDM	FETM	FDTM	FEM	FDM	FETM	FDTM
4×4	756	90	961	325	27	9	18	6
6×6	5700	650	1849	861	75	25	26	10
8×8	21756	2450	3025	1653	147	49	34	14
10×10	59292	6642	4489	2701	243	81	42	18
12×12	13212	14762	6241	4005	363	121	50	22
14×14	257556	28730	8281	5565	507	169	58	26
16×16	456300	5085	10609	7381	675	225	66	30
18×18	752556	83810	13225	9453	867	289	74	34
20×20	1173972	130682	16129	11781	1083	361	82	38

参文 1).Timoshenko&S.W.K:Theory of Plate and Shell,McGRAW-HILL,1959, 2)成岡・遠田：伝達マトリックス法,培風舘,1970, 3)O.C.Zienkiezwicz:The Finite Element Method,3rd,McGRAW-HILL,1977, 4)右田・遠田：有限要素伝達マトリックス法による板の曲げの解析, 東海大学工学部紀要,Vol.24,No.2,pp.83-92, 5)右田・遠田：差分伝達マトリックス法による板の曲げの解析, 東海大学工学部紀要,投稿中.