土木学会西部支部研究発表会(1986.3)

矩形板の非弾性曲げの一解析法

長崎大学　正員　　崎山　毅
長崎大学　正員　○松田　浩
長崎大学　　　　　秋友　隆二・原口　耕治

1、まえがき

筆者らは先に、変厚矩形板の基礎微分方程式について、板の縦横の等分割線の交点における解析的近似解を求め、これに基づく、任意の境界条件、荷重条件、板厚分布をもつ平板の曲げ解法を提示した。本研究は、その解析法を矩形板の非弾性曲げの解析に応用したものである。

矩形板の非弾性曲げ問題は、荷重の漸増に伴う、部材断面の塑性域の生成、拡大による剛性変化のために、結局、変厚矩形板の曲げ問題に帰着される。したがって、本解析法によると、比較的容易に非弾性曲げ解析を行なうことができる。なお、たわみは、板厚を越えない範囲として、幾何学的非線形性の影響は無視する。

2、基礎微分方程式とその解析的近似解

第n荷重増分段階における荷重強度をq、断面力、変形をXp (p=1～8)とすれば、荷重増分Δqが付加された第（n＋1）荷重増分段階における、荷重強度および断面力、変形は、それぞれ（q＋Δq），(Xp＋ΔXp)となる。このとき第n荷重増分段階を基準とした、荷重増分Δqに対する断面力および変形の基礎方程式は、断面力および変形の無次元量を導入して、つぎの連立偏微分方程式として与えられる。なお、式(1)はReissnerの平板曲げ理論に基づくものである。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \Delta X_1}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial \Delta X_2}{\partial \eta}+\Delta q=0,\ \frac{\partial \Delta X_3}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial \Delta X_5}{\partial \eta}=\mu\Delta X_2,\ \frac{\partial \Delta X_4}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial \Delta X_3}{\partial \eta}=\mu\Delta X_1,\ \frac{\partial \Delta X_6}{\partial \zeta}+\nu\mu\frac{\partial \Delta X_7}{\partial \eta}=I\Delta X_4,\\&\nu\frac{\partial \Delta X_6}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial \Delta X_7}{\partial \eta}=I\Delta X_5,\ \frac{\partial \Delta X_7}{\partial \zeta}+\mu\frac{\partial \Delta X_6}{\partial \eta}=J\Delta X_3,\ \frac{\partial \Delta X_8}{\partial \eta}+\Delta X_7=\kappa\Delta X_2,\ \frac{\partial \Delta X_8}{\partial \zeta}+\mu\Delta X_6=\mu\kappa\Delta X_1\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここに、Qy、Qx：せん断力、Mxy：ねじりモーメント、My、Mx：曲げモーメント、θy、θx：たわみ角、

w：たわみ、E：弾性係数、G：せん断弾性係数、ν：ポアソン比、h：板厚

$(X_1, X_2)=\frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}(Q_y, Q_x)$, $(X_3, X_4, X_5)=\frac{a}{D_0(1-\nu^2)}(M_{xy}, M_y, M_x)$, $(X_6, X_7)=(\theta_y, \theta_x)$, $X_8=\frac{w}{a}$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度,

$x=a\eta$, $y=b\zeta$, a, b：矩形板の横，縦の辺長， q_0：基準荷重強度，h_0：基準板厚，$\mu=b/a$， $\overline{q}=\mu K_1\frac{q}{q_0}$, $K_1=\frac{q_0a^3}{D_0(1-\nu^2)}$,

$I=\mu(1-\nu^2)\left(\frac{h_0}{h}\right)^3$, $J=2\mu(1+\nu)\left(\frac{h_0}{h}\right)^3$, $\kappa=\frac{1}{10}\frac{E}{G}\left(\frac{h_0}{a}\right)^2\frac{h_0}{h}$, $D_0=\frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$：基準板剛度,

式(1)を用いて、矩形板の非弾性曲げ解析を行なうことができる。しかしながら、式(1)は、板厚、板剛度を変数係数とする連立偏微分方程式となるため、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると考えられる。したがって、本研究においては、矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の解析的近似解を求めることとする。なお、この解析的近似解を求める方法の詳細については、文献(6)を参照されたい。

式(1)の連立偏微分方程式の任意の離散点(i,j) に関する解析的近似解は次式となる。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}\left(\sum_{f=0}^{i}a_{1pijfd}\cdot X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j}a_{2pijgd}\cdot X_{s0g}\right)+q_{pij}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

ここに、ΔXrfo、ΔXsogは、いわゆる積分定数であり対辺の境界条件によって決定されるべきものである。また、 a_{hpijud} は伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

3、材料非線形性

本研究では、断面細分割法を用い、非弾性剛性の算定を行なう。解析上の仮定は、次のとおりである。

(1)材料は、完全弾塑性体である。

(2)部材断面の応力状態が非弾性域に入った後も平面保持の法則が成り立つ。

(3)断面の各要素の降伏は Von Misesの降伏条件式によって決定される。

塑性域のひろがりの影響を各剛性の低下として考慮することにより各非弾性剛性値を得ることができる。各荷重段階での各非弾性剛性値は、次の手順により求められる。

(a)矩形板の断面を厚さ方向にΔA_{ij}に細分割する。

(b)ある荷重段階での荷重増分に対する、各微小要素ΔA_{ij}における増分応力$\Delta\sigma_{ij}$を求める。

(c)前荷重段階での全応力σ_{ij}に増分応力$\Delta\sigma_{ij}$を加えた全応力σ_{ij}とすると　　$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}$　(3)

で表わせる。

(d)材料の降伏は、次式で判定を行なう。　　$\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2\geqq\sigma_o^2$　　(4)

ここに、　σ_o：降伏応力、　$\sigma_x=12zM_x/h^3$、　$\sigma_y=12zM_y/h^3$、　$\tau_{xy}=12zM_{xy}/h^3$

(e)式(3)を満足する場合は、微小要素が塑性したとみなし、微小要素の剛性を零とおき、満足しない場合には弾性域として元の剛性をもたせ計算する。

(f)矩形板の等分割点における断面のすべての微小要素に対して、式(4)を判定し、板剛度の減少率を計算する。

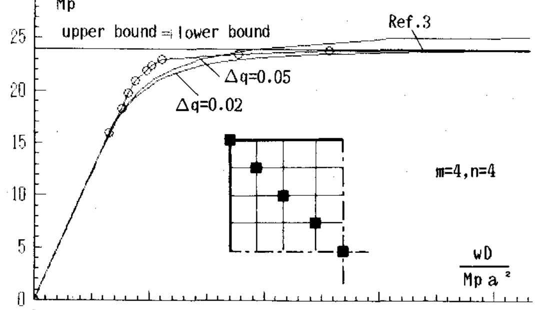
以上、微小荷重増分のもとで繰り返し計算を行なう。

4、数値解析

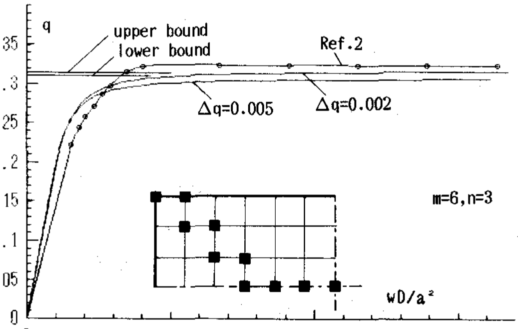
本解析法による矩形板の弾塑性解析の数値解の収束性および精度を検討するために、既往の近似解法による解析結果との比較を行なう。はじめに、等分布荷重を満載する四辺単純支持正方形板（μ=1.0、ν=0.3）について弾塑性解析を行なった。その結果を文献(3)の差分法による解析結果とともに図-1に示す。次に、等分布荷重を満載する四辺単純支持板（μ=2.0、ν=0.3）について弾塑性解析を行なった。その結果を文献(2)の有限要素法による解析結果とともに図-2に示す。なお、図-1および図-2には、塑性設計法による upper bound および lower bound の解も示している。図-1および図-2より、本解析法による矩形板の弾塑性解析は、比較的粗い分割数による解析でも十分実用性のある解が得られることがわかる。

（参考文献）

(1)太田俊昭著：構造物の非弾性解析（新体系土木工学８）1980年　(2)谷資信編著：板構造の解析（建築物の構造解析シリーズ）1976年　(3)A.K. Bhaumik and J.T. Hanley：ELASTO-PLASTIC PLATE ANALYSIS BY FINITE DIFFERENCES, Journal of Structural Division, ASCE, Oct. 1967, pp.279-293　(4)A.H.S. Ang AND L.A. Lopez：DISCRETE MODEL ANALYSIS OF ELASTIC-PLATIC PLATES, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Feb. 1968, pp.271-293　(5)Yokoo, Y., 他２名：NUMERICAL ANALYSIS OF ELASTIC-PLATIC DEFORMATION OF SIMPLY SUPPORTED RECTANGULAR PLATES, Trans. of AIJ, No.152, P.27, Oct., 1968 (6)崎山毅、松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、1983年10月、pp.21-28



図－１荷重変位曲線（単純支持正方形板）ν=0.3



図－２荷重変位曲線（単純支持板）ν=0.3