

粒状体の浸透現象に関する一考察

鹿児島大学工学部 正員 北村 良介
同 上 学生員 宮崎 保通

1. まえがき

土質材料のような粒状体は、不規則な大きさ、形状を有する粒子実質部分とその間隙を満たす気体、流体からなる多相混合体である。このような材料の複雑な力学的挙動を粒状体の物性に基礎を置き、総合的に統一した理論によって解析し、粒状体力学を体系化した科学にすることは、この分野における1つの重要な課題である。

ところで、北村はマルコフモデルと称する粒状体の力学モデルを提案し、このモデルが粒状体の圧縮、せん断挙動を表現できることを明らかにしてきている¹⁾。さらには、本モデルを浸透、圧密現象へ適用する手法についても述べてきている²⁾。本報告では、マルコフモデルを用いた粒状体力学の体系化をめざし、浸透現象に関して粒子スケールで若干の考察を加え、さらには、それをもとにした数値実験を行っている。

2. 粒状体の浸透モデル

Darcyの法則を用いた浸透モデルとして、straight capillarie model, parallel type model, serial type model, branching type modelなどがある³⁾。ここで提案する浸透モデルはこれらのものと基本的には同じであるが、新たに確率密度関数を導入している。

粒状体は不規則な大きさ、形状を有する粒子の集合体であり、必然的にそれらの間隙の形状、大きさも不規則である。このような間隙を流れる流体の挙動を解析するため、ここでは図-1に示すようなモデルを考える。すなわち、粒状体を細かく分割し、さらに、その分割された小部分(以下、これを素体積(element volume)と称することにする)の間隙を径が D 、傾きが θ の管に置きかえる。そして、管径 D とその傾き θ を確率変数とし、それらの確率密度関数 $P(D)$ 、 $P_c(\theta)$ を導入することにより、粒状体の間隙分布をモデル化する。

図-1のモデルを用いて、まず、透水係数を求める。図-1の管内の流れがHagen-Poiseuilleの法則に従うものとする、平均流速 $\bar{u}_a$ は次式であらわされる。

$$\bar{u}_a = \frac{r_w}{8\mu} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \lambda \quad (1)$$

ここに、 μ ：流体の粘性係数、 D ：管径、

r_w ：流体の単位体積重量、 λ ：動水勾配。

また、(1)式中の動水勾配 λ は図-1においては次のようになる。

$$\lambda = \frac{4U}{r_w} \cdot \frac{\sin \theta}{He} \quad (2)$$

ここに、 $4U$ ：圧力水頭差

(2)式を(1)式に代入すると平均流速 $\bar{u}_a$ は次のようになる。

$$\bar{u}_a = \frac{4U \cdot D^2 \cdot \sin \theta}{32 \cdot \mu \cdot He} \quad (3)$$

管径 D 、その傾き θ の確率密度関数を導入すると、粒状体内の平均流速 $\bar{u}_a$ は次式で求められる。

$$\bar{u}_a = \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4U \cdot D^2 \cdot \sin \theta}{32 \cdot \mu \cdot He} \cdot P_c(\theta) \cdot P_d(D) \cdot d\theta \cdot D \quad (4)$$

一方、Darcyの法則によれば、粒状体内の平均流速は次式で求まる。

$$\bar{u}_a = k \bar{\lambda} = k \frac{4U}{r_w} \frac{1}{He} \quad (5)$$

ここに、 k ：透水係数、 $\bar{\lambda}$ ：粒状体の平均動水勾配。

(4)式と(5)式を等値すると、透水係数 k は次式によって求められることになる。

$$k = \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{D^2 \cdot r_w \cdot \sin \theta}{32 \cdot \mu} \cdot P_c(\theta) \cdot P_d(D) \cdot d\theta \cdot D \quad (6)$$

次に、図-1のモデルをもとに粒状体の間隙比の誘導を試みることにする。図-1に示した素体積における間隙比 e は次式で求められる。

$$e = \frac{V_p}{V_e - V_p} \quad (7)$$

ここに、 V_e ：素体積、 V_p ：管径の体積。

ところが、 ∇e は次式で求められる。

$$\nabla e = \left(\frac{D}{\sin \theta} + \frac{He}{\tan \theta} \right) \cdot He \cdot D \quad (8)$$

したがって、粒状体全体での平均間隙比 $\bar{e}$ は、次のようになる。

$$\bar{e} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{D \cdot \pi}{4 \cdot \sin \theta}}{\frac{D}{\sin \theta} + \frac{He}{\tan \theta} - \frac{D \cdot \pi}{4 \cdot \sin \theta}} P_c(\theta) P_d(D) d\theta dD \quad (9)$$

3. 数値実験

2節で述べた浸透モデルを用い、粒状体の透水係数と間隙比の関係を求める数値実験をマイコンを用いて行った。具体的には、(6)、(9)式を用いている。

管径の分布をあらわす $P_d(D)$ としては、次式で示す対数正規分布を用いた。

$$P_d(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \xi \cdot D} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln D - \lambda}{\xi} \right)^2 \right\} dD \quad (10)$$

ここに、 ξ ; $\ln D$ の標準偏差、 λ ; $\ln D$ の平均値。

また、管の傾き θ に対しては、図-2に示すような分布を仮定した。すなわち、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \text{ のとき } P_c(\theta) = -\frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \zeta}{\zeta} \cdot \theta + \zeta \quad (11)$$

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } P_c(\theta) = \frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \zeta}{\zeta} \cdot \theta + \zeta \quad (12)$$

数値実験に必要な入力データは、素体積の高さ、管径の平均と標準偏差、管の方向の確率密度関数(略して、P.D.F.)の最低高さ、流体の粘性係数、圧力水頭差であり、これらの具体的な数値が表-1にまとめて示してある。図-3は、数値実験により得られた k と e の関係を整理したものである。Kozenyの式によれば、 k と e の間には次式のような関係があるとされている⁴⁾。

$$k = D_s \frac{r_w}{\mu} \frac{e^3}{1+e} \cdot C \quad (13)$$

ここに、 D_s ; 土粒子の直径。

(13)式は、 k と $e^3/(1+e)$ の間には比例関係が存在することを意味しているが、数値実験結果はそのことをよく表現できている。

4. あとがき

本報告で示した粒状体の浸透モデルにおいては、図

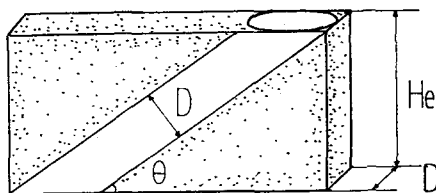


図-1・間隙モデル

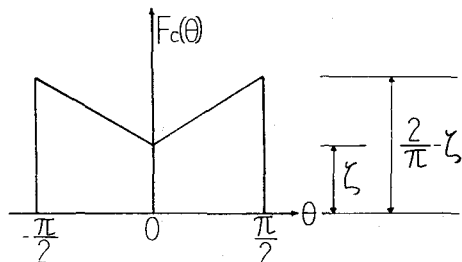


図-2・管の傾きの分布

表-1・入力データ

素体積の高さ He (cm)	0.01
管径の平均 (cm)	0.005~0.030
管径の標準偏差 (cm)	0.001
管の方向の P.D.F. の最低高さ ζ	0.159
流体の粘性係数 (gf·s/cm ²)	1.161×10^{-5}
圧力水頭差 (gf/cm ²)	2.8

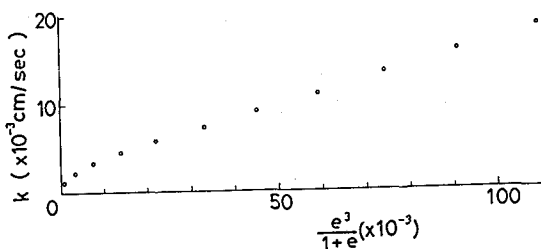


図-3・透水係数と間隙比の関係

-1に示した管径 D とその傾き θ の分布をあらわす確率密度関数がキーポイントになっている。さらには、これらの関数は、粒径分布、粒子接点角分布と密接な相関があるものと考えられる。今後は、実際の土質材料を用い透水実験を行なうとともに、これらの点について考察を加えていきたい。

参考文献

- 1) 北村ら第19回土質工学研究発表会, 1984.
- 2) 北村, 土質工学における確率統計の応用に関するシンポ, 1982.
- 3) Scheidegger, A-E: The physics of flow through porous media, 第3版, Univ. of Toronto Press, 1972
- 4) 赤井, 土質力学, 朝倉書店, 1980