

## 2次元水域における移流・乱流拡散の計算

九州大学大学院 学生員 ○大串 浩一郎

九州大学工学部 正 員 小松 利光

九州大学大学院 学生員 仲敷 憲和

## 1. まえがき

電算機を用いて数値的に拡散問題を取り扱う時は、移流と乱流拡散という2種類の輸送型式を含む偏微分方程式を解く必要がある。特に移流の計算は簡単な差分等を用いるだけでは到底無視できない程の誤差を生いるので、その計算には十分な注意が必要である。移流と乱流拡散を1step 毎に別個に独立させて計算するSplit operator approach は、この拡散方程式の有力な計算法の1つであり、それぞれのprocess に対して最適な計算方法を選択できるという大きな利点がある。Holly-Preissmann(1977)<sup>1)</sup> は、2-point 4th order methodを提案し、平均流による輸送の計算に関して飛躍的に改善された結果を得た。しかし、2次元問題への適用は非常に煩雑で計算時間を要し、とても実用的とは言えなかった。Holly-Komatsu(1984)<sup>2)</sup> は、精度の点でも計算の容易さの点でもH-P法の短所を十分補った8-point methodを提案し、2次元問題適用への道を拓いた。その後、Komatsu-Holly-Nakashiki(1984)<sup>3)</sup> は、8-point methodを更に改良して6-point methodを提案し、2次元問題でも平均流による拡散物質の輸送が容易に精度良く計算できることを示した。本論文では6-point methodを用いた、2次元水域での境界付近の取り扱い方と移流・乱流拡散の具体的な計算を示している。

## 2. 6-point method について

まず、2次元の移流方程式を考える。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $C(x, y, t)$  は拡散物質の濃度であり、 $U(x, y, t)$ 、 $V(x, y, t)$  はそれぞれx方向、y方向の流速である。(1)式は次の様になる。

$$\frac{dx}{dt} = U, \quad \frac{dy}{dt} = V \quad \text{上で} \quad \frac{dC}{dt} = 0 \quad (2)$$

従って求める解は次式で得られる(図-1)。

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{\xi,\eta}^n \quad (3)$$

ここで、 $i, j$  はそれぞれx, y方向の格子点の指標であり、 $(\xi, \eta)$  は時刻 $t_n$ におけるx-y平面と特性曲線の交点の座標である。 $C_{\xi,\eta}^n$ を求めるには1次元の6-point methodを一方に6本の格子線に沿って適用し、得られた値について直角方向にもう一度適用することにより得られる。形式的には次の様に書くことができる。

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{\xi,\eta}^n = \sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 b_{rs} C_{i+r-4, j+s-4}^n \quad (4)$$

ここに $b_{rs}$ は、1次元の6-point methodにおける係数で、Courant数 $\alpha$ の3次式である(文献3)参照)。

## 3. 境界外の濃度の推算式

2次元の計算領域においても、境界外において境界に沿って2点ずつ濃度の推定値が要求される(図-2)。今、 $(x_i, y_j, t_n)$ のまわりにxに関してTaylor級数に展開すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} C_{i-2,j}^n &= C_{i,j}^n - 2\Delta x \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,j,n} + \cdots \\ C_{i-1,j}^n &= C_{i,j}^n - \Delta x \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,j,n} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

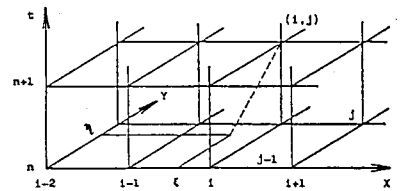


図-1 2次元問題の計算格子

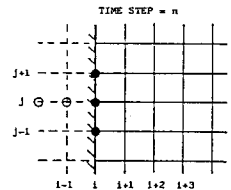


図-2 2次元境界領域

境界において濃度は(4)式を満足するとすれば次式が得られる。

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,j,n} = -\frac{1}{U(x_i, y_j, t_n)} \left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{i,j,n} - \frac{V(x_i, y_j, t_n)}{U(x_i, y_j, t_n)} \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{i,j,n} \quad (6)$$

$(x_i, y_j, t_n)$  のまわりについて Taylor 級数に展開して  $C_{i,j}^{n-1}$ ,  $C_{i,j}^{n-2}$  を求め、3 次以上の項を微小として無視したこれらの式を逆に  $\partial C / \partial t|_{i,j,n}$ ,  $\partial^2 C / \partial t^2|_{i,j,n}$  を未知数として連立させて解くと

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{i,j,n} = \frac{1}{2\Delta t} (3C_{i,j}^n - 4C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j}^{n-2}) \quad (7)$$

が得られる。一方  $\partial C / \partial y|_{i,j,n}$  については中央差分をとると次の様になる。

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \quad (8)$$

式(7), (8)を式(6)に代入し、その結果を改めて式(5)に代入すると次式が得られる。 図-3 2次元回転流れ場

$$\left. \begin{aligned} C_{i-2,j}^n &= \frac{\Delta x}{U} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (3C_{i,j}^n - 4C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j}^{n-2}) + \frac{V}{\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \right\} + C_{i,j}^n \\ C_{i-1,j}^n &= \frac{\Delta x}{2U} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (3C_{i,j}^n - 4C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j}^{n-2}) + \frac{V}{\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \right\} + C_{i,j}^n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

図-2の逆、つまり計算領域から拡散物質が外へ出る場合も同様の考察により簡単に境界外の濃度が推算される。

次に式(4), (9)を用いた2次元問題の計算例を示す。図-3の様に剛体的に角速度  $\omega = 2\pi/12,000 \text{ sec}^{-1}$  で回転する流れの場を考え、初期条件として中心より600 m離れた  $x, y$  の正負の座標軸上4カ所に標準偏差  $\sigma_x = \sigma_y = 200 \text{ m}$ , peak 値が10の Gauss 型濃度分布を与える。この計算では計算領域が縦横1,400 mの正方形で区切られているため、濃度の輸送に境界条件が大きな役割を果たすことになる。今、移流のみを考えているから1/4回転後( $t=3,000 \text{ sec}$ )の分布は初期条件と一致しなければならない。 $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 100 \text{ sec}$  の計算条件のもとで式(4), (9)を用いて計算した結果を図-4に示す。同じ条件のもとで H-P 法を用いて計算した場合の peak の誤差は1.8%, 今回の計算結果の peak の誤差は1%であった。

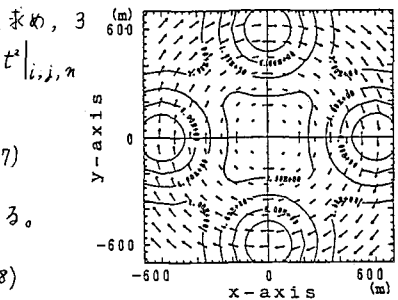


図-3 2次元回転流れ場

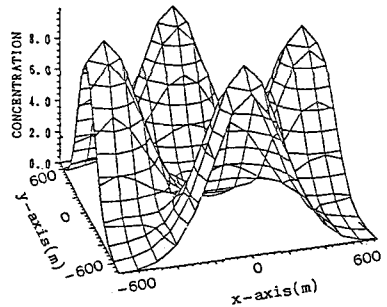


図-4  $t=3,000 \text{ sec}$  の濃度分布

#### 4. 移流・乱流拡散の計算例

流速が  $U = -ax$ ,  $V = ay$  (ここで  $a = 3 \times 10^{-3}$ ) である直角部を回る流れを考える。拡散係数は単純に  $D = 20 \sqrt{U^2 + V^2}$  とおき、境界条件は  $t=0$  で  $x = -3,500 \text{ m}$ ,  $y = 1,300 \text{ m}$  に中心をもち  $C_{\max} = 10$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 200 \text{ m}$  である2次元 Gauss 型濃度分布が  $U = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $V = 0 \text{ m/s}$  に沿って  $x$  軸

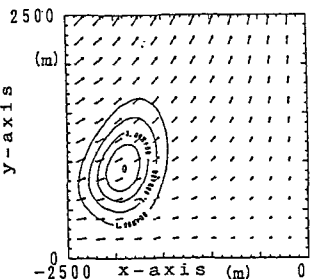


図-5 直角部の流れ

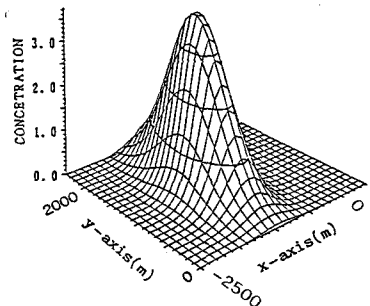


図-6  $t=4,000 \text{ sec}$  の濃度分布

の正の方向に流れる時、 $x = 2,500 \text{ m}$  の計算領域の境界で検出される濃度分布を境界条件とした。 $t=3,000 \text{ sec}$ ,  $t=4,000 \text{ sec}$  の計算結果を図-5, 6に示す。Gauss 分布が移流によって変形し、乱流拡散によ、て拡散していく様子が良く示されている。

#### 参考文献

- 1) Holly, F.M. Jr. and A. Preissmann: 1977 JHYD, ASCE, vol. 103
- 2) 小松利光, F.M. Holly Jr.: 1984 第28回水理講演会論文集
- 3) Komatsu, T., F.M. Holly Jr. and N. Nakashiki: 1984 Proceedings of Fourth Congress of APD, IAHR, Chiangmai, Thailand