二次元移流分散方程式の重み付差分式による数値解

九州産業大学　正会員　加納正道
東　和　大学　正会員○空閑幸雄
九州産業大学　正会員　赤坂順三

1・まえがき　前報[1)]において、我々は二次元移流分散方程式を解くにあたり、ＡＤＩ法的考え方によって、一次元重み付差分式を二回使用して解析した。また、その結果従来の差分法に比べ高精度の解を得ることができたことを報告した。そこで、今回は二次元移流分散方程式を直接解く重み付差分式とその方法によって得た結果の一部を示す。

2・二次元移流分散方程式の直接重み付差分式　二次元移流分散方程式の重み付差分式解を以下に従って求める。ここで簡単のために流速および拡散係数一定で沈殿、減衰などの非保存項がない場合を考えると、移流分散方程式(1) が得られる。式(1) を満足する x,y,t の多項式をその式中の (x,y) の最大次数を増加させながら (x,y) の4次まで求めると、式(2) のような有限級数が得られ、これを一般式で表わすと式(3) となる。さて、式(1)

$$\frac{\partial C}{\partial t}=d_1\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+d_2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}-v_1\frac{\partial C}{\partial x}-v_2\frac{\partial C}{\partial y} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
C^{(0)}&=1\\
C^{(1)}&=(x-v_1t)+(y-v_2t)\\
C^{(2)}&=\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^2+2(d_1+d_2)t\\
C^{(3)}&=\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^3+6\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}(d_1+d_2)t\\
C^{(4)}&=\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^4+12\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^2(d_1+d_2)t+12(d_1+d_2)^2t^2
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$C^{(r)}(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\frac{r!}{(r-2i)!\,i!}\left[\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^{r-2i}\{(d_1+d_2)t\}^i\right] \tag{3}$$

は、原点を任意の位置に移してもその形を変えないから、差分間隔を $\Delta x=h,\Delta y=\beta h,\Delta t=k$ とし、原点のごく近傍を考えて、$x=ph,y=s\beta h,t=qk$ として、p,q,s は大きくない整数とし、図１の未知点に隣接する周辺点に対して、０、±１、±２ とする。いま、$k=\lambda h^2$ とおく。すなわち $t=qk=q\lambda h^2$ とする。さらに式(4) とすると式(3) は式(5) となる。さて、ここで図１に示すような

$$\left(F_x=\frac{v_1k}{h}=v_1\lambda h,F_y=\frac{v_2k}{\beta h}=\frac{v_2\lambda h}{\beta},\mu_x=\frac{d_1k}{h^2}=d_1\lambda,\mu_y=\frac{d_2k}{\beta^2h^2}=\frac{d_2\lambda}{\beta^2}\right) \tag{4}$$

$$C^{(r)}(ph,s\beta h,qk)=\sum_{i=0}^{r/2}\frac{r!}{(r-2i)!\,i!}\left[h^r\{(p-qF_x)+(s-qF_y)\beta\}^{r-2i}\{q(\mu_x+\beta^2\mu_y)\}^i\right] \tag{5}$$

$$\begin{aligned}C(i,j,m)=&R_1\cdot C(i-1,j,m-1)+R_2\cdot C(i,j,m-1)+R_3\cdot C(i+1,j,m-1)\\&+R_4\cdot C(i,j-1,m-1)+R_5\cdot C(i,j+1,m-1)\end{aligned} \tag{6}$$

周辺点をとった場合の各点の重み $R_1\cdots R_5$ を式(5) を用いて決定する。いま、考える点 $(ih,j\beta h,mk)$ の濃度を $C(i,j,m)$ と記せば、差分式は式(6) となる。次に、考える点に原点を移し、式(6) で $i=j=m=0$ とし、式(5) の $r=0,1,\cdots 4$ の各 r について、各周辺点に対する p,s,q を代入して各点の C を求め、これを式(6) に入れれば、連立方程式(7) が得られ、これを解けば、各点の重みが決定される。

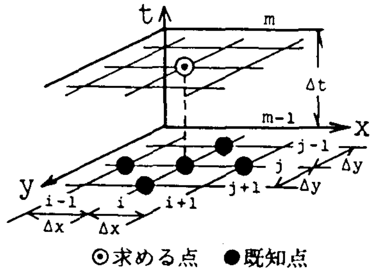

図１　差分モデル

3・重み付差分式解の精度　二次元移流分散方程式の厳密解の一つは次

$$C(x,y,t)=\mathrm{EXP}((-x+v_1t)/\sqrt{d_1}+(-y+v_2t)/\sqrt{d_2}+2t)$$

式で表わされる。ここでは、前報同様厳密解と二次元重み付差分式解との相対誤差（ε）が $O(\Delta x^4)$ を満足する無次元流速 F_x、無次元拡散係数 $\mu=(\mu_x+\mu_y)/2$ の範囲を調べ図６、図７に示す。図６は、$\beta=1$, $\lambda=1/4$、y方向格子幅を２倍とした場合について図２の陽形式差分モ

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
Fx-1+\beta Fy & Fx+\beta Fy & Fx+1+\beta Fy & Fx+\beta(Fy-1) & Fx+\beta(Fy+1) \\
\begin{array}{l}(Fx-1+\beta Fy)^2\\-2(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+\beta Fy)^2\\-2(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+1+\beta Fy)^2\\-2(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy-1)\}^2\\-2(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy+1)\}^2\\-2(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} \\
\begin{array}{l}(Fx-1+\beta Fy)^3\\-6(Fx-1+\beta Fy)\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+\beta Fy)^3\\-6(Fx+\beta Fy)\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+1+\beta Fy)^3\\-6(Fx+1+\beta Fy)\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy-1)\}^3\\-6\{Fx+\beta(Fy-1)\}\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy+1)\}^3\\-6\{Fx+\beta(Fy+1)\}\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} \\
\begin{array}{l}(Fx-1+\beta Fy)^4\\+12(\mu x+\beta^2\mu y)^2\\-12(Fx-1+\beta Fy)^2\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+\beta Fy)^4\\+12(\mu x+\beta^2\mu y)^2\\-12(Fx+\beta Fy)^2\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}(Fx+1+\beta Fy)^4\\+12(\mu x+\beta^2\mu y)^2\\-12(Fx+1+\beta Fy)^2\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy-1)\}^4\\+12(\mu x+\beta^2\mu y)^2\\-12\{Fx+\beta(Fy-1)\}^2\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array} & \begin{array}{l}\{Fx+\beta(Fy+1)\}^4\\+12(\mu x+\beta^2\mu y)^2\\-12\{Fx+\beta(Fy+1)\}^2\\\cdot(\mu x+\beta^2\mu y)\end{array}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\qquad (7)
$$

デルを示し、また、図7は　$\beta=3/4,\lambda=1/4$　の場合について図3、図4、図5の陰形式差分モデルが　$\varepsilon\leqq O(\Delta x^4)$を満足する範囲を斜線部分で示したものである。これより陰形式差分モデルの場合は、図7より　Fx,μ　の大きさによって図3、図4、図5の差分モデルを選択することでかなり広い範囲にわたって　$\varepsilon\leqq O(\Delta x^4)$を満足することができた。

4・まとめ　二次元移流分散方程式の解析で、前報のＡＤＩ法的解析結果と本報の解析結果より、二次元の場合も一次元同様　F,μ　のかなり広い範囲で$\varepsilon\leqq O(\Delta x^4)$を満足することがわかった。

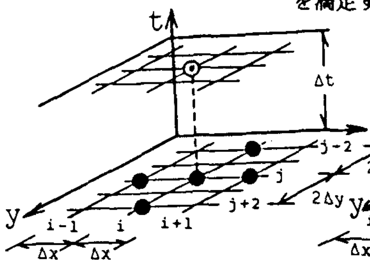

図２　（陽形式差分モデル）

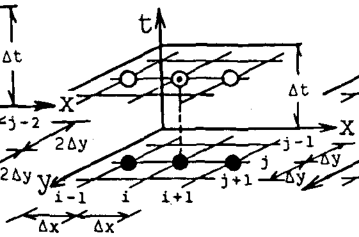

図３　（陰形式差分モデル）

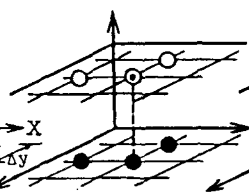

図４

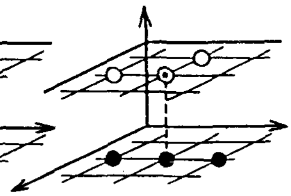

図５

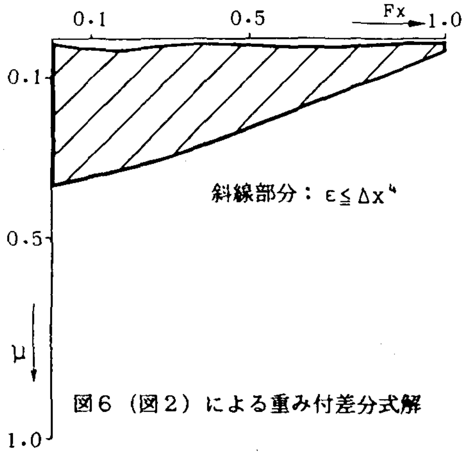

図６（図２）による重み付差分式解

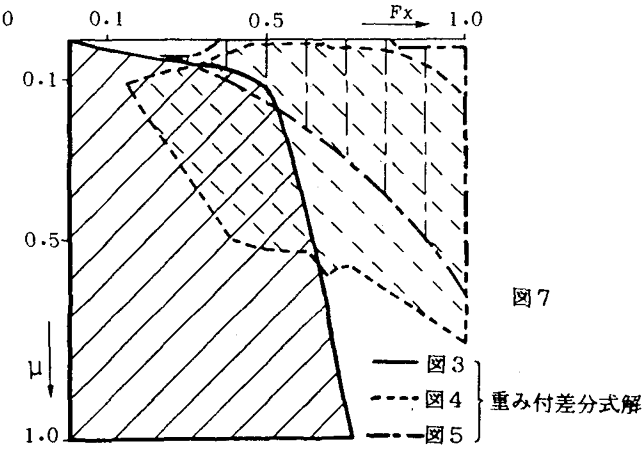

図７

参　考　文　献

1）加納・赤坂・空閑：二次元移流分散方程式のＡＤＩ法による高精度差分方程式解、土木学会第39回年講２部