斜板の曲げの一解析法

長崎大学　正員○松田　浩
長崎大学　正員　崎山　毅

1. まえがき

筆者らは、先に、基礎微分方程式の積分方程式への変換と、積分方程式の近似解法の応用とによって得られる解析的近似解に基づく解析法を提案し、その実用性を検証するとともに、任意の境界条件、荷重条件および変断面性をもつ変厚矩形板の曲げに対する解法の汎用性を明らかにした[1]。本文は、その解析法を斜板の曲げ問題に適用したもので、以下に、その解析方法ならびに数値計算結果を示す。

2. 斜板の基礎微分方程式

図1に示すような斜交座標を考え、その斜交座標系に対する斜板のせん断力を Q_y, Q_x、ねじりモーメントを M_{xy}、曲げモーメントを M_y, M_x、たわみ角を θ_y, θ_x、たわみを w とすれば、せん断変形の影響を考慮した斜板の基礎微分方程式は、(1)式のようになる。

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+q\cos\alpha=0,\quad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,\quad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0,$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{M_y}{D}\\ \frac{M_x}{D}\\ \frac{M_{xy}}{D}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\ \frac{\partial\theta_y}{\partial x}+\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\frac{Q_y}{Gt_s}\\ \frac{Q_x}{Gt_s}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\\ \theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\end{Bmatrix}\qquad(1)$$

ここに、$q=q(x,y)$：横荷重強度、E：弾性係数、G：せん断弾性係数、ν：ポアソン比、$h=h(x,y)$：板厚、$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度、$t_s=h/1.2$

式(1)の各式を無次元化すると次式のように書き換えられる

$$\frac{\partial X_1}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial X_2}{\partial\eta}+\bar{q}\cos\alpha=0\qquad(2.a)$$

$$\mu\frac{\partial X_5}{\partial\eta}+\frac{\partial X_3}{\partial\zeta}-\mu X_2=0\qquad(2.b)$$

$$\frac{\partial X_4}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial X_3}{\partial\eta}-\mu X_1=0\qquad(2.c)$$

$$a_{11}\frac{\partial X_6}{\partial\zeta}+a_{12}\mu\frac{\partial X_7}{\partial\eta}+a_{13}\left(\mu\frac{\partial X_6}{\partial\eta}+\frac{\partial X_7}{\partial\zeta}\right)=IX_4\qquad(2.d)$$

$$a_{21}\frac{\partial X_6}{\partial\zeta}+a_{22}\mu\frac{\partial X_7}{\partial\eta}+a_{23}\left(\mu\frac{\partial X_6}{\partial\eta}+\frac{\partial X_7}{\partial\zeta}\right)=IX_5\qquad(2.e)$$

$$a_{31}\frac{\partial X_6}{\partial\zeta}+a_{32}\mu\frac{\partial X_7}{\partial\eta}+a_{33}\left(\mu\frac{\partial X_6}{\partial\eta}+\frac{\partial X_7}{\partial\zeta}\right)=IX_3\qquad(2.f)$$

$$a_{55}\left(X_6+\frac{1}{\mu}\frac{\partial X_8}{\partial\zeta}\right)+a_{56}\left(X_7+\frac{\partial X_8}{\partial\eta}\right)=\kappa X_1\qquad(2.g)$$

$$a_{65}\left(X_6+\frac{1}{\mu}\frac{\partial X_8}{\partial\zeta}\right)+a_{66}\left(X_7+\frac{\partial X_8}{\partial\eta}\right)=\kappa X_2\qquad(2.h)$$

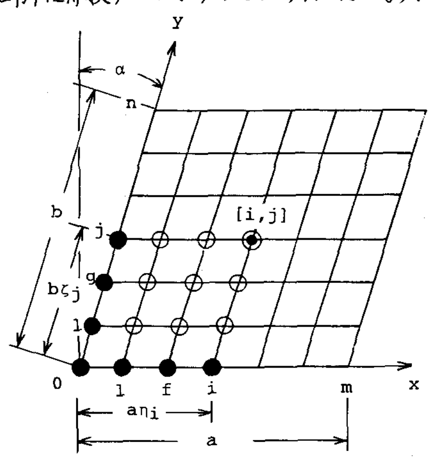

図1. 斜板の離散点

$$\left(\begin{array}{l}a_{11}=1/C^3,\ a_{12}=(t_1^2+\nu)/C,\\ a_{13}=-t_1/C^2,\ a_{22}=1/C^3,\ a_{23}=-t_1/C^2,\\ a_{33}=(1+S^2-\nu C^2)/2C^3,\ a_{56}=-t_1,\\ a_{55}=a_{66}=1/C,\quad a_{ij}=a_{ji}\ (i\neq j)\\ C=\cos\alpha,\ S=\sin\alpha,\ t_1=S/C\end{array}\right)$$

ここに、$(X_1,X_2)=(Q_y,Q_x)a^2/D_0(1-\nu^2)$、$(X_3,X_4,X_5)=(M_{xy},M_y,M_x)a/D_0(1-\nu^2)$、$(X_6,X_7)=(\theta_y,\theta_x)$、$X_8=w/a$、$x=a\eta$、$y=b\zeta$、$a,b$：斜板の辺長、$\mu=b/a$、$\bar{q}=\mu k q/q_0$、$k=q_0a^3/D_0(1-\nu^2)$、

$I=\mu(1-\nu^2)(h_0/h)^3$, $K=Eh_0^3/10Ga^2h$, $D_0=Eh_0^3/12(1-\nu^2)$：基準板剛度，h_0：基準板厚，q_0：基準荷重強度．

3．基礎微分方程式の解析的近似解

連立偏微分方程式(2)の各式を領域[i, j]において面積分し，積分方程式に変換し，次に等間隔の数値積分法の応用により，積分方程式を離散表示すると，任意の分割点における無次元化された各断面力および変形X_{pij}は次式のように表わせる。

$$X_{pij}=\sum_{t=1}^{8}\left\{\sum_{f=0}^{i}\beta_{if}A_{pt}\left[X_{tf0}-X_{tfj}(1-\delta_{fi})\right]+\sum_{g=0}^{j}\beta_{jg}B_{pt}\left[X_{t0g}-X_{tig}(1-\delta_{gj})\right]+\sum_{f=0}^{i}\sum_{g=0}^{j}\beta_{if}\beta_{jg}C_{ptfg}X_{tfg}(1-\delta_{fi}\delta_{gj})\right\}-\sum_{f=0}^{i}\sum_{g=0}^{j}\beta_{if}\beta_{jg}A_{p1}\bar{q}_{fg} \quad (3)$$

ここに，$p=1\sim8$，β_{ij}：等分割数値積分の重み係数（台形公式），δ_{ij}：Kronecker's delta

(3)式は，任意の分割点の断面力および変形X_{pij}は，境界辺上の点の量のみで表わせることを示しており次式のように書ける。

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}\left\{\sum_{f=0}^{i}a_{pijfd}X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j}b_{pijgd}X_{s0g}\right\}+q_{pij} \qquad (4)$$

ここに，X_{rf0}，X_{s0g}：積分定数，q_{pij}：荷重項，なお，四辺固定の場合の積分定数および境界条件を図2に示す。

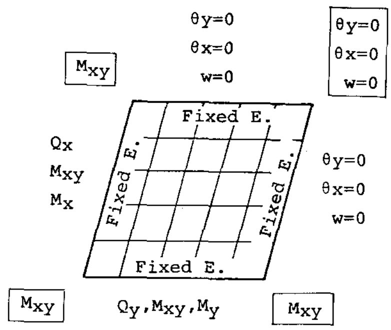

図2 積分定数と境界条件（四辺固定板）

4．数値計算結果および考察

本解析法による，斜板の曲げの数値解の収束性および精度を検討するために，既往の近似解法による解析結果との比較を行なった。表1では，四辺固定なる境界条件をもつ斜板（$\mu=1.0$，$\nu=0.3$）の中央断面でのたわみwについて，本解析法による数値解を既往の数値解とともに示している。ただし，αは，15°，30°，45°，60°にとり，分割数mは，4，6，8，10と変化させている。これにより，得られた結果は，8分割程度の比較的粗い分割においても，既往の近似解法による数値解と比較的よく一致している。また，収束性に注目すると，矩形板（$\alpha=0°$）の場合は一様な収束性が得られたが，$\alpha=30°$，45°の斜板では，分割数mとの間に一様な収束性は得られていない。しかしながら，斜角に関係なく分割数mを増大することにより，安定した収束状態が示されている。

5．あとがき

四辺固定なる境界条件をもつ斜板に対して，本解析法による数値解を示した。今後，任意の境界条件，荷重条件および変断面性を有する斜板の解析を行なう予定である。最後に数値計算に協力して頂いた長崎大学学生喜入浩幸君に謝意を表します。

Table 1. Convergency of central deflection of clamped skew plates subjected to uniform load. (μ=1.0, ν=0.3) Coefficient C; $w=C(qa^4/D)\times10^{-2}$

Skew Angle	m	Authors	Iyengar & Srinivasan	Morley	Kennedy	Hamada	Mizusawa
15°	4 6 8 10	1.144 1.138 1.132 1.129	1.1230	1.120	1.1206	1.1229	–
30°	4 6 8 10	0.7493 0.7810 0.7770 0.7745	0.7687	0.769	0.7381	0.7690	–
45°	4 6 8 10	0.3358 0.3790 0.3820 0.3810	0.3761	0.377	0.3175	0.3769	0.3785
60°	4 6 8 10	0.0843 0.1035 0.1087 0.1097	0.1073	–	0.0750	0.1084	0.1110

（参考文献）

1) 崎山・松田，変厚矩形板の曲げの一解析法，土木論集，338号
2) Morley, Skew plates and Structures, Pergamon Press ('63)
3) Iyengar & Srinivasan, Clamped skew plates under uniformly distributed load, J. R. Aeronaut. Soc. 71, 72.
4) Kennedy, On bending of Clamped skew plates under pressure, J. R. Aeronaut. Soc. 69
5) Mizusawa, Analysis of skew plates in bending using B-spline function, Mem. of Daido Inst. Tech. Vol. 14