

FEMによるズーム解析法におけるズーム領域について

熊本大学 正 員 平井 一男
 八代高専 正 員 水田 洋司
 八代高専 内山 義博
 熊本大学 学生員○今村 孝

1. はじめに

応力集中問題を有限要素法で解析する場合、一般に応力勾配急変部を細かい要素に分割する方法が用いられているが、そのためにマトリクスの自由度が増加し、精度上、計算機容量、計算機時間などに問題を生じる。それらの点を解決するため、著者らは、先に境界条件を規定することなしに次々に要素を小さくする方法(ズーム法)を提案してきた。しかし、細分割する領域には何ら基準がなく経験的に行っているのが現状であるため、本研究ではズーム領域の選定を定性的に行う一手法を提案し、その手法を用いた解析結果も合わせて報告する。

2. ズーム法の解析原理

与系の剛性マトリクス K とそのたわみ性マトリクス f を分割法により求めると、次のように表される。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad f = K^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + V Z^{-1} Y & -V Z^{-1} \\ -Z^{-1} Y & Z^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{ここで } V = K_{11}^{-1} K_{12} \quad (3) \quad Y = K_{21} K_{11}^{-1} \quad (4)$$

$$(1) \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2) \quad Z = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} \quad (5)$$

与系の剛性マトリクスの K に相当する部分の要素が細分割(ズーム)されると剛性マトリクスとたわみ性マトリクスは、式(6)、(7)となる。ただし*はマトリクスの次数が増加したことを示す。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{12} & K_{ij} \\ 0 & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad Y^* = K_{21}^* K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} \quad V^* = K_{11}^{-1} K_{12}^* = K_{11}^{-1} [K_{12} \ 0] = [Y^T \ 0] \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} + V^* Z^{*-1} Y^* & -V^* Z^{*-1} \\ -Z^{*-1} Y^* & Z^{*-1} \end{bmatrix} \quad (6) \quad Z^* = K_{22}^* - K_{21}^* K_{11}^{-1} K_{12}^* \quad (7) \quad = \begin{bmatrix} f_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{12} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ズーム後の力と変位の関係を式(7)を用いて表すと、図-1に示すようになる。応力集中問題の解析の場合には応力集中部近傍の応力状態がわかればよく、そのためにはズーム部の変位が求まればよい。このように考えると、拡大された系の全部のたわみ性マトリクスを求める必要はなく、たわみ性マトリクスのズーム部に相当する部分が求まれば十分である。また、2回目以降のズームも同様の考え方で行なうことができる。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & (-Z_1^{-1} Y_1)^T \\ -Z_1^{-1} Y_1 & Z_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

図-1 ズーム1回目による
マトリクス、ベクトルの拡大

3. ズーム領域の決定について

(1) ポアソン比による影響範囲の算定

弾性学における二次元弾性問題の応力分布状態は、構造物の荷重状態と形状のみに支配され、ヤング率 E 、ポアソン比 ν などの弾性定数には、影響されないことが知られている。ところが、実際に有限要素法で応力集中問題を数値計算すると、ポアソン比 ν が応力分布状態に影響を与えることがわかる。特に分割の粗い場合にはその影響量は大きく、細分割するにつれて影響量は小さくなり、また、応力集中を生じない形状においては影響がないことを確認した。すなわち、応力状態を要素内の歪一定という条件で近似できるような分割の仕方をすれば、ポアソン比 ν の変化による応力変化は生じないと考えられる。従つて、ポアソン比 ν が応力状態に及ぼす影響範囲を求めることにより、ズーム領域を決定する方法が有効であると考えられる。

応力 σ をポアソン比 ν で微分することにより影響量を算定する。

$\sigma = DBU$ より $\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{\partial D}{\partial \nu} BU + DB \frac{\partial U}{\partial \nu}$
 $= \frac{\partial D}{\partial \nu} BU - DBK^{-1} \frac{\partial K}{\partial \nu} U$ (11)

ここで、

$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \Sigma B^T \frac{\partial D}{\partial \nu} B$ (12) $\frac{\partial D}{\partial \nu} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 2\nu & 1+\nu^2 & 0 \\ 1+\nu^2 & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)^2/2 \end{bmatrix}$ (13)

(2) 細分割による影響範囲の算定

応力集中部の要素をさらに細分割することで、近傍の要素の応力状態に及ぼす影響量が求まり、ズーム領域が決定される。実際の計算では与系の分割によって得られた応力と与系のもっとも応力集中の高い要素をさらに細分割した系により得られた応力との応力差をもって影響量とする。

4. 数値計算例及び結果

表-1 モデルの諸元

Uniform Load	p	9.806	N/mm ²
Length of Plate	L	40	mm
Width of Plate	B	20	mm
Thickness of Plate	h	1	mm
Diameter of Hole	D	4	mm
Young's Modulus	E	9.806 × 10 ⁶	N/mm ²
Poisson's Ratio	ν	0.3	
D/B		0.2	

計算例として図-2に示した有孔平板モデルを考え、モデルの対称性より1/4部分を解析した。与系の分割において、前節(2)の手法により適当な基準を設け、その影響量の大きさを表したものが図-3である。手法の有効性を確かめるために異なるズーム領域を持つ3つのモデルを用いた。図-5に示したMODEL A3は図-3の影響範囲に従ってズーム領域を選んだもので、ズーム1回から4回までの領域を表している。図-6、図-7はそれぞれMODEL A1、MODEL A2のズーム領域を表している。3つのモデルを用いて解析した結果をズーム回数(全要素数)と応力集中係数(S. C. F.)を用いて表したものが図-4であり、MODEL A3が厳密解 α_r に良好に収束しているのがわかる。尚、前節(1)による計算結果は当日発表予

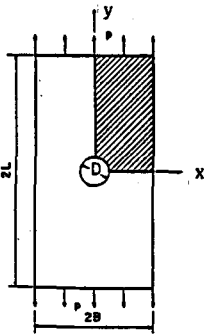


図-2 解析モデル

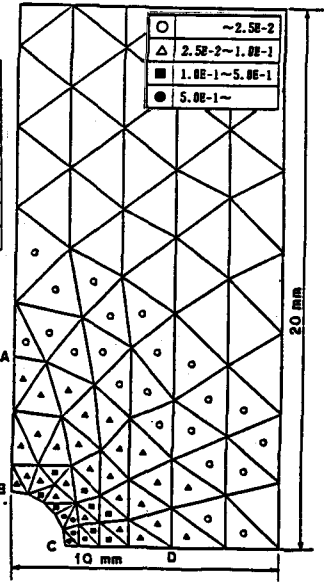


図-3 影響範囲

算結果は当日発表予定である。

(参考文献)

- (1) 平井、水田、内山
"応力集中問題の一
解析法"
熊本大学研究報告
第31巻第2号
- (2) 水田、内山、山田
"応力集中問題の一
厳密解法" S57
土木学会西部支部
研究発表講演集

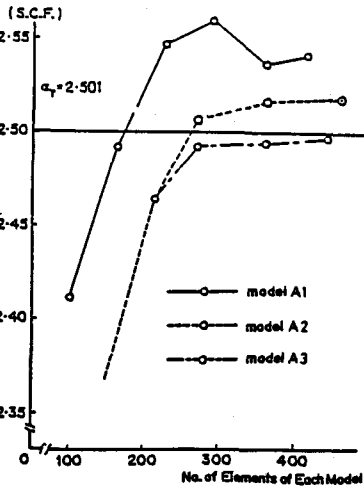


図-4 応力集中係数と
全要素数との関係

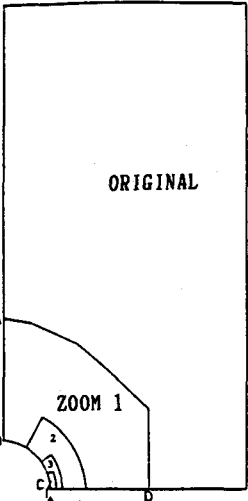


図-5 MODEL A3
のズーム領域

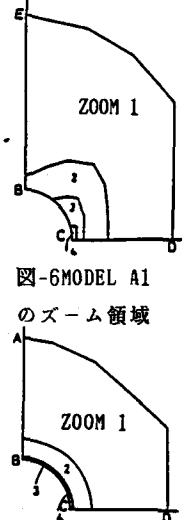


図-6 MODEL A1
のズーム領域

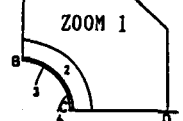


図-7 MODEL A2
のズーム領域