

幾何学的非線形性を考慮した面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性(続報)

長崎大学工学部 学生員 〇川野隆太

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 池田虎彦

1. まえがき 長方形板が面内変動曲げを受けると、係数励振によって面外不安定振動が生ずる。¹⁾線形理論によれば、これらの不安定振動は発散するが、現実には幾何学的非線形性の寄与によって、その振動は有限の大きさとなる。そこで著者らは幾何学的非線形性の影響を考慮して、この面外振動の振幅を決定する手法を提案した。²⁾本研究では同じ手法を用いて面外振動の最大応答に及ぼす初期応力、初期変形、境界条件および減衰力の影響などのパラメーターの影響を評価した結果を報告するものである。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示すような長方形板に、面内曲げモーメント $M = M_0 + M_1 \cos \Omega t$ が作用する場合、初期変形を有する長方形板の運動方程式と適合条件式は *Mauguere* の式を用いて次式で表わされる。

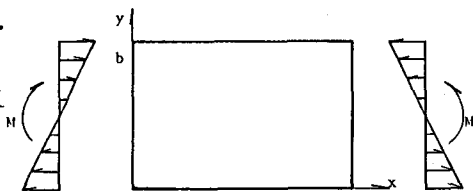


図-1 一般図

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^2 w - \frac{6}{b^2} (M_0 + M_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \right] \quad (2)$$

ここで、 x, y : 直交座標系、 d : 板厚、 ρ : 板の密度、 C : 減衰係数、 $D = Ed^3 / \{12(1-\nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 $w(x, y, t)$: 面外変位、 $w_0(x, y)$: 初期変位、 F : *Airy* の応力関数、 a, b : x, y 方向の辺長境界条件は、曲げに対して次の2ケース。面内変位に対して固定とする。

Case I 全周辺単純支持

Case II 荷重辺単純支持、他辺固定

$$\text{曲げ: } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, b) \quad ; w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, b) \quad (3)$$

$$\text{面内変位: } \int_0^b u \, dy = 0 \quad (x=0, a), \int_0^a v \, dx = 0 \quad (y=0, b) \quad ; \text{ここで: } u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} \, dx, v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} \, dy \quad (4)$$

3. 解法 式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = d \sum_{m,n} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad w_0 = e_0 d W(x, y) \quad (5)$$

ここで、 T_{mn} : 未知の時間関数、 W_{mn} : 式(3)を満足する座標関数、 e_0 : 板厚 d に対する初期変位の倍率
また、 W_{mn} について長方形板の曲げ振動の基準関数を用いると、各ケースについて次のように定義される。

$$\text{Case I: } W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{Case II: } W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \left\{ \cos \frac{(i-1)\pi}{b} y - \cos \frac{(i+1)\pi}{b} y \right\} \quad (6)$$

つぎに、式(2)、(4)より応力関数 F を決定して、式(1)に *Galerkin* 法を適用する。

$$\int_0^a \int_0^b L(w, F) W_{mp} \, dx \, dy = 0 \quad (p=1, 2, \dots) \quad (7) \quad \text{すなわち}$$

$$\bar{\omega}^2 \bar{T}_{mp} + 2R \bar{\omega} W_{mp} \bar{T}_{mp} + \bar{\omega}_{mp}^2 T_{mp} + \lambda_{cr} (\bar{M}_0 + \bar{M}_1 \cos \Omega t) \sum_{r=1}^{\infty} D_r T_{mr} + \sum_{r=1, s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} E_{msr} T_{mn} T_{ms} T_{mr} + e_0^2 \sum_{r=1}^{\infty} F_r T_{mr} + e_0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} G_{nri} T_{mn} T_{mr} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $D_r, E_{nsr}, \dots$: Galerkin 法による積分項を含む係数項、 λ_{cr} : 座屈固有値、 $\bar{M}_0$: 無次元静的曲げモーメント、 $\bar{M}_t$: 無次元変動曲げモーメント。

式(8)において、線形項は第1, 2, 3, 4項と $\bar{c}_2$ の項であり、非線形項は第5項と $\bar{c}_3$ の項である。

4. 解析結果

1) 静的曲げモーメントの影響 線形理論では静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ の影響として主の単純共振による不安定領域が大きく表われることを報告した。図-2は $\bar{M}_0=0.3$ とした場合の正方形板の面外振動の最大変位を表わしたものである。図において実線は結合共振、破線は単純共振を示す。図より $\omega_1+\omega_2$ の結合共振の不安定領域では、 $\bar{M}_0$ が0.3付近から急に変位が大きくなることがわかる。また、この結合共振の波数 $M=2$ は座屈波形と一致している。

2) 減衰力の影響 図-3は $\bar{M}_0=0.0$ の場合の減衰力の影響を表わしたものである。ここでは、結合共振 $\omega_1+\omega_2$ 、単純共振 ω_1^2 について解析した。減衰定数($R_{m1}=R_{m2}$)として、 ω_1, ω_2 は $R=0.01, 0.03$, ω_1^2 は $R=0.001, 0.003$ を使用した。図より減衰定数の相違により $\bar{M}_0=0.2$ 付近で最大変位が大きく変わってくる。また、本ケースでは結合共振よりも単純共振の方が減衰の影響を大きく受ける。

図-4は図-2の $\omega_1+\omega_2$ の時間応答を示したものであり最大応答が生ずるまでに時間を要する。このタイプの時間応答はこの不安定領域のみに生ずる。図-5は単純共振 ω_1^2 の時間応答を示したものである。

5. まとめ 静的曲げモーメントを免ける長方形板の最大変位は、受けない場合と比べて大きくなる。特に $\omega_1+\omega_2$ の結合共振は著しい。実橋において $\bar{M}_0$ は0.1~0.2付近にあるため減衰により最大変位は大きく変わる。よってこれらのパラメータの把握は重要である。その他のパラメータの影響については講演時に発表する。

参考文献

- 1) 高橋, 田川, 池田, 松川: 土木学会論文報告集, 第341号, 1984.1
- 2) 高橋, 池田, 松川: 土木学会第39回講演梗概要集, 1-485, 1984.10

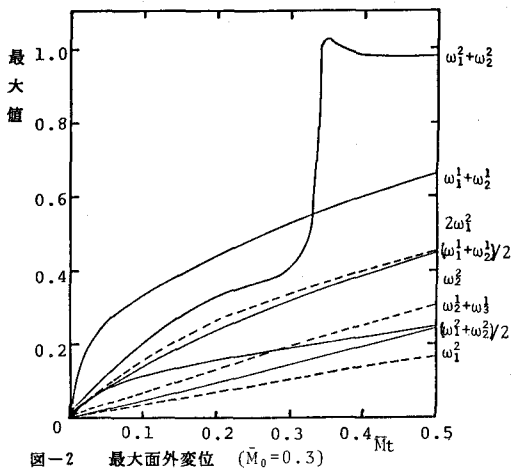


図-2 最大面外変位 ($\bar{M}_0=0.3$)

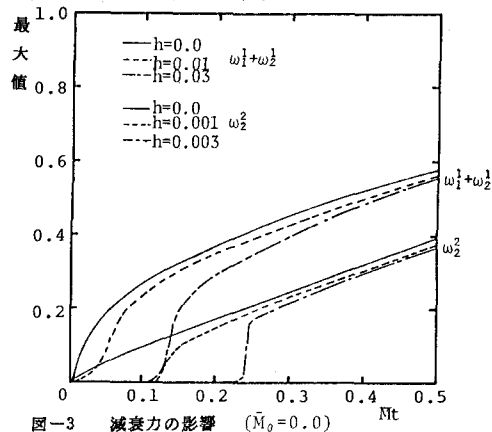


図-3 減衰力の影響 ($\bar{M}_0=0.0$)

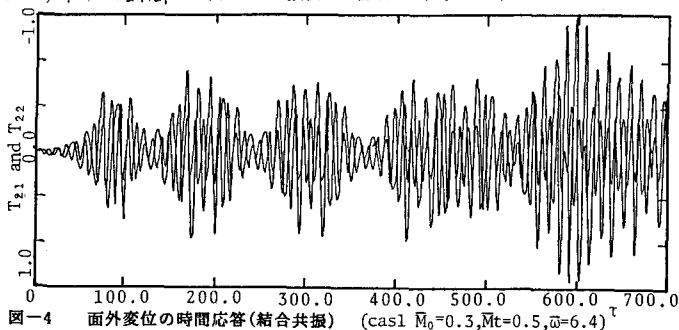


図-4 面外変位の時間応答(結合共振) (case 1 $\bar{M}_0=0.3, \bar{M}_t=0.5, \bar{\omega}=6.4$)

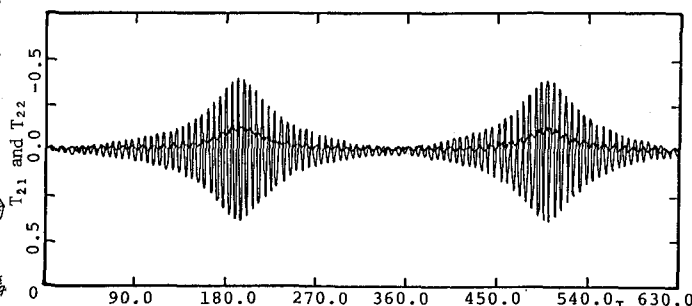


図-5 面外変位の時間応答(単純共振) (case 1 $\bar{M}_0=0.0, \bar{M}_t=0.5, \bar{\omega}=4.0$)