

薄肉断面部材の断面変形を考慮した有限変位理論とその応用

九州大学工学部 学生員 丸山 義一

九州大学工学部 正会員 彦坂 照

1. 緒言

薄肉断面部材に関する既往の微小変位曲げねじり理論および有限変位理論は、断面剛の根本仮定に基づいて導かれている。本研究は、断面剛の仮定を用いない薄肉開断面部材の有限変位理論と新たに提示し、断面変形が部材の剛性低下や不安定挙動に及ぼす影響を解析するものである。ただし、本報は部材の幾何学的非線形性のみを考慮し、材料の非線形性は考えていない。

2. 座標系と有限変位関数

図-1のように N 枚の板要素からなる薄肉開断面の図心 C を原点とし、 X, Y を主軸、 Z を部材軸にとる右手系直交座標 (X, Y, Z) を考える。部材上任意点の変位は、変形前の X, Y, Z 方向に関する成分 u, v, w で定義する。これらとは別に、断面の板厚 t の中心に沿う Δ 座標と、それに垂直な n 座標をとる。

本研究では、はりを構成する板要素の節点が $X-Y$ 面内で相対変位を起す状態を、断面変形と定義する。このとき各板要素には面外曲げが生じるが、板要素の部材軸直角方向伸縮は無視する。 N 枚の板要素から構成される開断面部材の断面変形の自由度は $N-3$ となる。 $N-3$ 個の断面変形は、図-2のように板要素 $i+2$ に対して板要素 $i+1$ が反時計回りになす相対回転角 $\theta_i (i=1, 2, \dots, N-3)$ で定義する。回転角 θ_i によるはり断面上の任意点の変位は、 θ_i の2次以上の項を無視し、 θ_i の線形項のみをとる。この結果、断面変形を考慮した有限変位理論の変位成分 u, v は次のように表わされる。

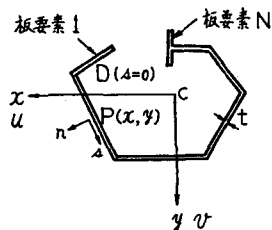
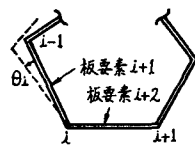


図-1 座標系

図-2 断面変形 θ_i の定義

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \sin \varphi - (x - x_s)(1 - \cos \varphi) - \sum_{i=1}^{N-3} \{ (x - x_i) \sin \varphi + (y - y_i) \cos \varphi \} \mu_i \theta_i \\ v &= v_s + (x - x_s) \sin \varphi - (y - y_s)(1 - \cos \varphi) + \sum_{i=1}^{N-3} \{ (x - x_i) \cos \varphi - (y - y_i) \sin \varphi \} \mu_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 u_s, v_s は断面のせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の X, Y 方向変位、 φ はねじり角、 $\mu_i(\Delta) = \begin{cases} 1 & (\Delta \leq \Delta_i) \\ 0 & (\Delta > \Delta_i) \end{cases}$

式(1)の $\sin \varphi, \cos \varphi$ をテーラー展開し、変位の3次以上の項を無視すれば、 u, v, w の変位関数は

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \varphi - (x - x_s) \frac{\varphi^2}{2} - \sum_{i=1}^{N-3} \{ (x - x_i) \varphi + (y - y_i) \} \mu_i \theta_i \\ v &= v_s + (x - x_s) \varphi - (y - y_s) \frac{\varphi^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-3} \{ x - x_i - (y - y_i) \varphi \} \mu_i \theta_i \\ w &= w_s - (u'_s + v'_s \varphi) x - (v'_s - u'_s \varphi) y + \omega(\Delta) \varphi + \sum_{i=1}^{N-3} \left\{ \psi_i(\Delta) \theta_i + \theta_i u'_s \{ (y - y_i) \mu_i + y_i \mu_{ic} \} - \theta_i v'_s \{ (x - x_i) \mu_i + x_i \mu_{ic} \} + \lambda_i(\Delta) \varphi \theta_i \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 w_s, μ_{ic} は図心 C の w および μ_i の値、 $\omega(\Delta)$ はねじりの単位タorsi関数、 $\psi_i(\Delta)$ と $\lambda_i(\Delta)$ は断面の形状寸法より定まる Δ の関数である。

3. はりの応力とつり合い方程式

$$(1) \text{ Z軸方向直応力: } \sigma_z = E \epsilon_z = E \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

$$(2) \text{ St. Venant のねじりによるせん断応力: } \tau_{zx} = G \gamma_{zx} = G \cdot 2n \varphi' \quad (4)$$

(3) はり軸直角方向直応力:

断面変形 θ_i に伴って生じる板要素のはり軸直角方向曲げモーメントを単位長当り M_s とすれば

$$M_s = \sum_{i=1}^{N-3} M_i \theta_i$$

ここに、 M_k は $\theta_k=1$ のみにより生じる曲げモーメント、 M_s による応力は、 $I_s=\frac{t^3}{12}$ を用いて

$$\alpha_s = E \epsilon_s = \frac{M_s}{I_s} n \quad (5)$$

(4) つり合い方程式： 長さ L の部材に作用する単位体積当りの外力の x, y, z 方向成分を P_x, P_y, P_z とし、部材両端($z=0, L$)断面に作用する単位面積当りの外力の x, y, z 方向成分を $\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z$ とすれば、式(3)~(5)の応力とひずみを用いて、断面変形を考慮した部材のつり合い方程式が次の仮想変位の原理より導かれる。

$$\int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dA dz - \int_0^L \int_A (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) dA dz - \left[\int_A (\bar{P}_x \delta u + \bar{P}_y \delta v + \bar{P}_z \delta w) dA \right]_0^L = 0 \quad (6)$$

ただし、 $z=0$ で $v=-1$ 、 $z=L$ で $v=1$

4. 部材の弾性座屈 (固有値問題) への応用

図-3のType I, IIのように断面積 $4at$ 、断面変形の自由度が1で一軸対称断面をもつ長さ L 、両端ジンの開断面部材が、図心 C に中心軸圧縮力 P を受ける場合の弱軸(x 軸)まわりのEuler座屈問題に、本理論を適用する。

ただし、板要素の局部座屈は考慮しない。座屈時に図-3の破線のような断面変形 θ_k が生ずるものとすれば、式(7)より θ_k と y 方向変位 v_k に関する次の連立微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_x v_k'' + P v_k'' - EI_{xx} \theta_k'' + \chi_k P \theta_k'' &= 0 \\ EI_{xx} \theta_k'' + \chi_k \frac{H_{xx}}{I_x} P \theta_k'' + f_{xx} \theta_k + \left(\frac{H_{xx}}{I_x} + \chi_k \right) P v_k'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 I_x は x 軸に関する断面二次モーメント、 χ_k は対称軸より左側 $\frac{1}{2}$ 断面の図心の x 座標、断面変形に特有の I_{xx}, f_{xx}, H_{xx} を含む断面定数を板要素の幅 a と板厚 t で表わせば、表-1の通りである。いま

$$v_k = A \sin \frac{\pi}{L} z, \quad \theta_k = B \sin \frac{\pi}{L} z \quad (8)$$

と仮定して式(7)に代入すれば P に関する座屈条件式が得られ、座屈荷重 P_k が次式のように求められる。

$$P_k = C P_E \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{2\chi_k^2} \left[- \left\{ \frac{I_{xx}}{I_x} + \frac{H_{xx}}{I_x} \left(\frac{H_{xx}}{I_x} + 2\chi_k \right) + \frac{L^4}{\pi^4} \frac{f_{xx}}{EI_x} \right\} \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left\{ \frac{I_{xx}}{I_x} + \left(\frac{H_{xx}}{I_x} + 2\chi_k \right)^2 + \frac{L^4}{\pi^4} \frac{f_{xx}}{EI_x} \right\} \left\{ \frac{I_{xx}}{I_x} + \left(\frac{H_{xx}}{I_x} \right)^2 + \frac{L^4}{\pi^4} \frac{f_{xx}}{EI_x} \right\}} \right] \quad (10)$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{断面剛の仮定に基づく} \\ \text{Eulerの座屈荷重} \end{array} \right)$$

式(10)の C 値は、断面変形の影響によるEuler荷重の低減率を表わす。Type I, IIの断面をもつ圧縮材について、板要素の幅厚比 a/t をパラメーターにとり、 L/a を変数として C 値をプロットすれば、図-4の結果を得る。Type IIの断面はType Iに比べて断面定数 I_{xx} が著しく小さく、かつ H_{xx} が異符号であることにより、座屈時の断面変形の影響をほとんど受けないことがわかる。

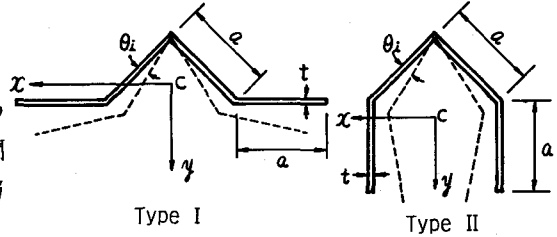


図-3 断面変形の自由度が1の一軸対称断面

表-1 断面定数

	I_x	I_y	χ_k	I_{xx}	f_{xx}	H_{xx}
Type I	$0.21ta^3$	$3.41ta^3$	$0.78a$	$0.133ta^3$	$0.5E\frac{t^3}{a}$	$0.125td$
Type II	$0.98td^3$	$1.33td^3$	$0.53a$	$0.028td^3$	$0.5E\frac{t^3}{a}$	$-0.42td$

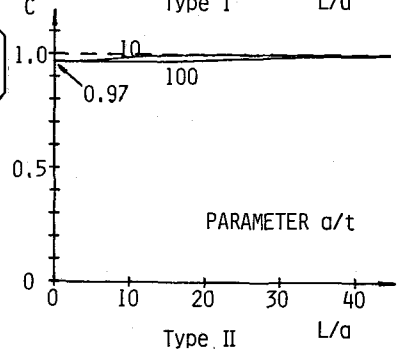
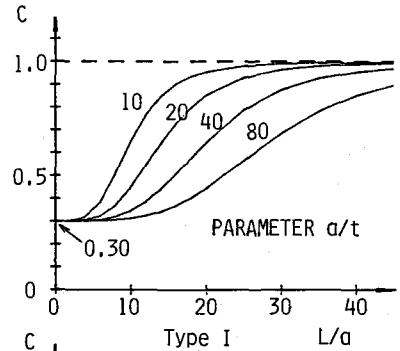


図-4 断面変形による座屈荷重の低減率