応力法による骨組構造の有限変位解析

熊本大学 工学部　正員　三池亮次
同　上　○学生員　福地良彦
同　上　正員　小林一郎

1．始めに、物体内部の任意点 x において、物体力 f，境界において表面力 p を受けて、変形の中間状態からの任意点の有限変位 Δu を生じてつり合い状態にあり、その内部の任意点の Kirchhoff 応力が $\mathbb{T}_K$ で、一種のひずみテンソルが $\Delta\mathbb{E}_K$ であるとする。このつり合い状態において、物体力と表面力の仮想の微小増分 δf，δp があり、それに伴って、仮想 Kirchhoff 応力増分 $\delta\mathbb{T}_K$ が生ずるとすると、有限変形補仮想仕事の原理に従って、δp が有限の変位 Δu に対してなす補仮想仕事 δW は、$\delta\mathbb{T}_K$ が $\Delta\mathbb{E}_K$ に対してなす仕事の積分に等しく、[1]

$$\delta W=\iint_A \delta p\cdot\Delta u\,dA+\iiint_V \delta f\cdot\Delta u\,dV=\iint_{A'}\delta p^*\cdot\Delta u\,dA'+\iiint_{V'}\delta f^*\cdot\Delta u\,dV'$$

$$=\iiint_{V'}\mathrm{trace}\left\{\delta\mathbb{T}_K\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^T\frac{\partial\Delta u}{\partial x'}\right\}dV'=\iiint_{V'}\mathrm{trace}\left(\delta\mathbb{T}_K^T\Delta\mathbb{E}_K\right)dV'=\delta U' \qquad (1)$$

ここに、物体の変形の状態を変形前，中間，変形後の3段階に分け、dA' と dV' は中間状態，dA と dV は変形後の状態における面積および体積要素である。

2．2次元骨組構造で、せん断力が無視される骨組構造　式(1)において、仮想 Kirchhoff 応力テンソルは

$$\delta\mathbb{T}_K^T=\begin{bmatrix}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0\\ & \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & \frac{\delta A_3}{\delta A_3'}\end{bmatrix}\delta\Sigma^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & & 0\\ & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\end{bmatrix},\quad \delta\Sigma^T=\delta\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{bmatrix} \qquad (2)$$

である。$\delta\Sigma$ は、いわゆる、変形後の仮想の物理的応力マトリックスで、g_{ii} は、共変計量テンソル $G=(\partial x/\partial x')^T\partial x/\partial x'$ の対角要素である。

2次元骨組構造のとき、式(1)の $\partial x/\partial x'$ は、共変基底ベクトル e_i で構成され

$$\frac{\partial x}{\partial x'}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_1'} & \frac{\partial x}{\partial x_2'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix} \qquad (3)$$

中間状態における埋め込み直交座標 x_i' 軸の、変形後の方向余弦を l_i とすると $l_i=e_i/\sqrt{g_{ii}}$ である。部材軸方向に x_1' 軸をとる場合には $\delta\sigma_{22}=0$，また、せん断応力 $\delta\sigma_{12}=\delta\sigma_{21}\fallingdotseq 0$ の場合

$$\delta U'=\iiint_{V'}\mathrm{trace}\left\{\begin{bmatrix}\delta\sigma_{11}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial x_1'} & l_1\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial x_2'}\\ l_2\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial x_1'} & l_2\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial x_2'}\end{bmatrix}\right\}dV'$$

$$=\iiint_{V'}\delta\sigma_{11}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'}l_1\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial x_1'}\,dV' \qquad (4)$$

式(4)において、$\delta u_1=l\cdot\delta\Delta u$ は、剛体回転 $\Delta\theta$ に伴う成分 $\delta u_\theta=\delta x_1'(1-\cos\Delta\theta)$ と、伸び $\delta\Delta u_e$ の和であるので、[2]

$$\delta U'=\iiint_{V'}\delta\sigma_{11}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'}\left\{\frac{\partial\Delta u_e}{\partial x_1'}+(1-\cos\Delta\theta)\right\}dV' \qquad (5)$$

中間状態と変形後における面積要素の間には $\delta A_1'=\delta A_1$ の関係があり、変形後の仮想物理的直応力 $\delta\sigma_{11}$ は、平面保持の法則に従い、軸力 δN と曲げモーメント δM によって

$$\delta\sigma_n = \frac{\delta N}{A} + \frac{\delta M}{I}x \tag{6}$$

のように与えられる。ここに、Iは断面2次モーメント、xは、中立軸からの距離である。また、ひずみ

$$\frac{d\Delta u_e}{dx'} = \Delta e_m + \Delta\phi x \tag{7}$$

ここに、Δe_mは軸力によるひずみ、$\Delta\phi$は曲げモーメントによる断面の回転角であるから

$$\delta U' = \int_L \left[\{\Delta e_m + (1-\cos\Delta\theta)\}\delta N + \Delta\phi\,\delta M\right] d\ell \tag{8}$$

トラス部材で、軸力のみが生じる場合には、$\delta U' = \delta N\{\Delta\ell + (1-\cos\Delta\theta)\ell\}$ となる。δpを仮想外力、節点変位をΔd、仮想部材端断面力をδp_m、部材のひずみベクトルをΔe_mとすると、式(1)と(8)より

$$\delta p^T \Delta d = \delta p_m^T \Delta e_m' \tag{9}$$

トラスの場合には[3]、上式においてδp_mは①部材の仮想軸力$\delta N_{①}$ $(I = 1, 2, \cdots)$で構成され、又、ひずみベクトル$\Delta e_m'$は、

$$\Delta e_m' = \Delta e_m + \Delta e_\theta \tag{10}$$

のように、①部材のひずみ$\Delta e_{m①}$を要素とするΔe_mと、①部材の見掛けのひずみ$(1-\cos\Delta\theta_{①})$を要素とするベクトルΔe_θによって構成される。

不静定構造において、余り材の一対の自己釣合荷重を$\pm g$とし、pの代りに$\bar{p}^T = [p^T\ g^T]$を外力と考え、それに対応する仮想外力を$\delta\bar{p}^T = [\delta p^T\ \delta g^T]$とすると、仮想部材断面力と、$\delta p_m$と、式(9)は、

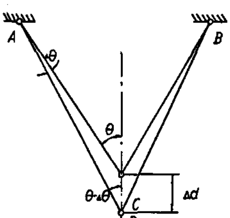
$$\delta p_m = [B_0\ B]\begin{bmatrix}\delta p\\ \delta g\end{bmatrix} \equiv \bar{B}\,\delta\bar{p}, \quad \delta\bar{p}^T\begin{bmatrix}\Delta d\\ 0\end{bmatrix} = \delta p_m^T \Delta e_m' \tag{11}$$

又、たわみ性マトリックスを、$F_m = diag\{1/EA_{①}\}$とし、

$$\Delta e_m = F_m \Delta p_m \tag{12}$$

変形後の部材断面力は、

$$p_m + \Delta p_m = \bar{B}(\bar{p} + \Delta\bar{p}) \tag{13}$$



図・1　2部材トラス

式(13)を(12)に、式(12)を(10)に代入し、更にこれと、式(11)の第1式を式(11)の第2式に用いると、

$$\Delta g = -(B^T F_m B)^{-1}\{B^T F_m(B_0\Delta p + \bar{B}\bar{p} - p_m) + B^T\Delta e_\theta\} \tag{14}$$

$$\Delta d = B_0^T F_m\{B_0\Delta p + B\Delta g + \bar{B}\bar{p} - p_m\} + B_0^T\Delta e_\theta \tag{15}$$

3．簡単な例題　静定で$\Delta g = 0$で、図・1の2部材トラスのC点の変位Δdを求める。
$N = P/2\cos(\theta-\Delta\theta)$であるから、

$$B_0 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2\cos(\theta-\Delta\theta)} & 0\\ \frac{1}{2\cos(\theta-\Delta\theta)} & 0\end{bmatrix},\ F_m = \begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & \frac{1}{k}\end{bmatrix},\ \Delta e_\theta = \begin{bmatrix}(1-\cos\Delta\theta)\ell\\ (1-\cos\Delta\theta)\ell\end{bmatrix},\ \Delta d = \frac{P}{2k\cos^2(\theta-\Delta\theta)} + \frac{(1-\cos\Delta\theta)\ell}{\cos(\theta-\Delta\theta)}$$

参考文献　(1) 三池亮次"有限変形における補足仮想仕事の原理とその応用"応用力学連合講演会，昭和54年11月
(2) 三池亮次、他"回転を考慮した増分形有限変位解析"、昭和58年 土木学会西部支部
(3) Livesley．"Matrix Methods of Structural Analysis"