

薄肉開断面ばりの弾塑性有限変位角解析

熊本大学 正 員 崎元 達郎

" 山尾 敏孝

" 学生員 坂田 力

1. まえがき

薄肉構造物に、曲げやねじりが作用して、崩壊荷重に近づいたときの構造物の弾塑性挙動は非常に複雑である。著者らは、薄肉弾性ばり理論を基に、そりねじりを考慮した開断面部材の三次元弾塑性有限変位理論の定式化を行ない、ねじり実験結果と比較し、その妥当性を確認した。本報告では、この解析手法を2, 3の数値計算例に適用し、他の解析手法による計算結果と比較検討するものである。

2. 解析上の仮定と増分つり合い方程式

接線剛性マトリックスの誘導等については、文献1)によって、すでに報告されたので、ここではその解析上の特徴およびその仮定について述べる。

まず、その特徴としては、1) 増分荷重段階ごとに变形する物体とともに座標系を移動させる移動座標系を用い、その座標系から次の荷重段階における変位をLagrangian表示する(図1)。2) 材料的非線形性を評価するため、すなわち荷重増分に伴う部材軸方向および断面方向への塑性域の広がりを追跡するために、構造物を部材要素と断面要素に分割する手法を用いる(図2)。3) 断面要素分割手法により、任意の分布形状を有する残留応力および任意の断面形状の薄肉開断面部材からなる構造物の弾塑性解析が可能となる。

4) 外荷重が重心以外の任意点に作用する場合も解析が可能である。

次に、この解析において用いられた仮定を示す。

1) 骨組は理想的な硬化型弾塑性性材によってできた薄肉矩形板で構成されている。2) 断面が一部塑性化した後も、曲げひずみは平面保持をする。3) 板厚は断面寸法に比べて十分小さく、断面のそりは板厚中心のそりで表わされる。4) 曲げ、あるいは曲げねじりによる、板厚中心面内のせん断力によるせん断ひずみは小さいので無視する。5) von Mises の降伏条件式が成立し、非弾性域では、Prandtl - Reuss の

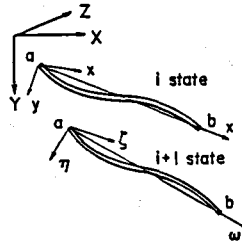


図1 移動座標系

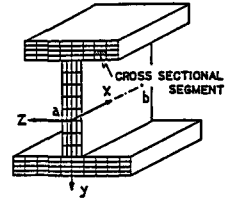


図2 断面要素分割

応力-ひずみ式が成立する。6) 断面の一部が塑性化した後も、St. Venant のねじりによるせん断ひずみは、板厚方向に直線分布する。7) 変位は大きくても、ひずみは微小である。

以上のような特徴および仮定を基にして、系のポテンシャルエネルギー増分の停留条件により、節点外力増分と節点変位増分を関係づける増分つり合い方程式が次式のように導びかれる。

$$(K_p + K_g) \cdot U = P - (\bar{F} - \bar{P})$$

なお、上式を解くために、Newton - Raphson法 および荷重増分法を用い、不釣り合い力が収束するまで繰返し計算を行なった。

ここに、 U は節点変位増分ベクトル、 P は節点外力増分ベクトル、 $\bar{P}$ は全節点外力ベクトル、 $\bar{F}$ は全節点断面力ベクトル、 K_p は弾塑性剛性マトリックス(14 × 14)、 K_g は幾何学的非線形性を表わす応力マトリックス(14 × 14)、 $(\bar{F} - \bar{P})$ は不釣り合い力を表す。

$$U = \begin{bmatrix} u_a & v_a & w_a & \phi_a & u_b & v_b & w_b & \phi_b \end{bmatrix}^T$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{xa} & P_{ya} & P_{za} & M_{xa} & P_{xb} & P_{yb} & P_{zb} & M_{xb} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{xa} & \bar{P}_{ya} & \bar{P}_{za} & \bar{M}_{xa} & \bar{P}_{xb} & \bar{P}_{yb} & \bar{P}_{zb} & \bar{M}_{xb} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{N_a + N_b}{2} & \frac{M_{xa} - M_{xb}}{l} & \frac{M_{ya} - M_{yb}}{l} & \frac{M_{za} - M_{zb}}{l} & \frac{N_a + N_b}{2} & \frac{M_{xa} - M_{xb}}{l} & \frac{M_{ya} - M_{yb}}{l} & \frac{M_{za} - M_{zb}}{l} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{ya} & \bar{M}_{yb} & \bar{M}_{yb} - \frac{(\bar{T}_b - \bar{T}_a)l}{12} \\ \frac{N_a + N_b}{2} & \frac{M_{xa} - M_{xb}}{l} & \frac{M_{ya} - M_{yb}}{l} & \frac{M_{za} - M_{zb}}{l} + \bar{T} & \bar{M}_{yb} & \bar{M}_{xb} & \bar{M}_{xb} + \frac{(\bar{T}_b - \bar{T}_a)l}{12} \end{bmatrix}^T$$

$$K_{\text{top}} =$$

U_a	V_a	W_a	ϕ_a	W'_a	V'_a	ϕ'_a
$\frac{1}{2}S_1$	0	0	$\frac{1}{2}S_2$	$\frac{1}{2}S_3$	$-\frac{1}{2}S_2$	$\frac{1}{2}S_4$
	$\frac{12}{\rho^2}S_5$	$\frac{12}{\rho^2}S_6$	$-\frac{12}{\rho^2}S_7$	$-\frac{6}{\rho^2}S_8$	$\frac{6}{\rho^2}S_9$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_1$
		$\frac{12}{\rho^2}S_{11}$	$-\frac{12}{\rho^2}S_{12}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{13}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{14}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{15} + \frac{1}{2}S_2$
		$\frac{12}{\rho^2}S_{16} + \frac{6}{5\rho^2}S_{17}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{18} + \frac{1}{2}S_3$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{19} + \frac{1}{2}S_4$	$\frac{6}{\rho^2}S_{20}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{21} + \frac{1}{10}S_5$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{22}$	$-\frac{4}{\rho^2}S_{23}$	$\frac{4}{\rho^2}S_{24} - \frac{1}{2}S_6$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{25}$	$-\frac{4}{\rho^2}S_{26}$	$\frac{4}{\rho^2}S_{27} + \frac{1}{2}S_7$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{28} - S_{29} + \frac{26}{15}S_{30}$		

* S_{10} は断面力増分と変形増分 ϕ の関係を表わす ϕ - S_{10} におけるマトリックスの要素を示す。詳細については文献 1) を参照。

Sym.

$$K_y =$$

U_a	V_a	W_a	ϕ_a	W'_a	V'_a	ϕ'_a
0	0	0	0	0	0	0
$\frac{6N}{5L}$	0	$-\frac{11M_{ya} + M_{yb}}{10L}$	0	$\frac{N}{10}$	$-\frac{M_{ya}}{10}$	
	$\frac{6N}{5L}$	$-\frac{11M_{za} + M_{zb}}{10L}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-\frac{M_{za}}{10}$	
		$\frac{6K}{5L}$	$\frac{9M_{za} + 2M_{zb}}{10}$	$\frac{9M_{ya} + 2M_{yb}}{10}$	$\frac{K}{10}$	
			$\frac{2L}{15}N$	0	$\frac{3M_{ya} + M_{yb}}{30}$	
				$\frac{2L}{15}N$	$\frac{3M_{za} + M_{zb}}{30}$	
					$\frac{2L}{15}K$	

Sym.

U_a	V_a	W_a	ϕ_a	W'_a	V'_a	ϕ'_a
$-\frac{1}{2}S_1$	0	0	$-\frac{1}{2}S_2$	$-\frac{1}{2}S_3$	$\frac{1}{2}S_2$	$-\frac{1}{2}S_4$
0	$-\frac{12}{\rho^2}S_5$	$-\frac{12}{\rho^2}S_6$	$\frac{12}{\rho^2}S_7$	$-\frac{6}{\rho^2}S_8$	$\frac{6}{\rho^2}S_9$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_1$
0	$-\frac{12}{\rho^2}S_{11}$	$-\frac{12}{\rho^2}S_{12}$	$\frac{12}{\rho^2}S_{13}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{14}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{15}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{16} + \frac{1}{2}S_2$
$-\frac{1}{2}S_5$	$\frac{12}{\rho^2}S_5$	$\frac{12}{\rho^2}S_6$	$-\frac{12}{\rho^2}S_7 + \frac{6}{5\rho^2}S_{17}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{18} + \frac{1}{2}S_3$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{19} + \frac{1}{2}S_4$	$\frac{6}{\rho^2}S_{20} + \frac{1}{10}S_5$
$-\frac{1}{2}S_6$	$\frac{6}{\rho^2}S_8$	$\frac{6}{\rho^2}S_9$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_6$	$\frac{2}{\rho^2}S_{22}$	$-\frac{2}{\rho^2}S_{23}$	$\frac{2}{\rho^2}S_{24} + \frac{1}{2}S_7$
$\frac{1}{2}S_2$	$-\frac{6}{\rho^2}S_8$	$-\frac{6}{\rho^2}S_9$	$\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_7$	$-\frac{2}{\rho^2}S_{22}$	$\frac{2}{\rho^2}S_{23}$	$-\frac{2}{\rho^2}S_{24} + \frac{1}{2}S_8$
$-\frac{1}{2}S_3$	$\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_3$	$\frac{6}{\rho^2}S_{11} + \frac{1}{2}S_4$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{12} + \frac{1}{2}S_5$	$\frac{2}{\rho^2}S_{25} + \frac{1}{2}S_9$	$-\frac{2}{\rho^2}S_{26} + \frac{1}{2}S_{10}$	$\frac{2}{\rho^2}S_{27} + \frac{1}{2}S_{11}$
$\frac{1}{2}S_4$	0	0	$\frac{1}{2}S_4$	$\frac{1}{2}S_5$	$-\frac{1}{2}S_4$	$\frac{1}{2}S_6$
	$\frac{12}{\rho^2}S_5$	$\frac{12}{\rho^2}S_6$	$-\frac{12}{\rho^2}S_7$	$-\frac{6}{\rho^2}S_8$	$\frac{6}{\rho^2}S_9$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{10} + \frac{1}{2}S_1$
		$\frac{12}{\rho^2}S_{11}$	$-\frac{12}{\rho^2}S_{12}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{13}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{14}$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{15} + \frac{1}{2}S_2$
		$\frac{12}{\rho^2}S_{16} + \frac{6}{5\rho^2}S_{17}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{18} + \frac{1}{2}S_3$	$-\frac{6}{\rho^2}S_{19} + \frac{1}{2}S_4$	$\frac{6}{\rho^2}S_{20}$	$\frac{6}{\rho^2}S_{21} + \frac{1}{10}S_5$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{22}$	$-\frac{4}{\rho^2}S_{23}$	$\frac{4}{\rho^2}S_{24} + \frac{1}{2}S_6$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{25}$	$-\frac{4}{\rho^2}S_{26}$	$\frac{4}{\rho^2}S_{27} + \frac{1}{2}S_7$
				$\frac{4}{\rho^2}S_{28} - S_{29} + \frac{26}{15}S_{30}$		

Sym.

U_a	V_a	W_a	ϕ_a	W'_a	V'_a	ϕ'_a
0	0	0	0	0	0	0
0	$-\frac{6N}{5L}$	0	$\frac{M_{ya} + 11M_{yb}}{10L}$	0	$\frac{N}{10}$	$-\frac{M_{ya}}{10}$
0	0	$-\frac{6N}{5L}$	$\frac{M_{za} + 11M_{zb}}{10L}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-\frac{M_{za}}{10}$
0			$\frac{11M_{ya} + M_{yb}}{10L}$	$\frac{11M_{za} + M_{zb}}{10L}$	$-\frac{6K}{5L}$	$\frac{2M_{ya} - M_{yb}}{10}$
0					$\frac{2M_{za} - M_{zb}}{10}$	$\frac{K}{10}$
0			$\frac{N}{10}$	$\frac{M_{za} - 2M_{zb}}{10}$	$-\frac{2N}{30}$	$-\frac{M_{ya}}{30}$
0	$-\frac{N}{10}$	0	$\frac{M_{ya} - 2M_{yb}}{10}$	0	$-\frac{2N}{30}$	$\frac{M_{za}}{30}$
0	$\frac{M_{ya}}{10}$	$\frac{M_{za}}{10}$	$-\frac{K}{10}$	$-\frac{M_{yb}}{30}$	$\frac{M_{zb}}{30}$	$-\frac{K}{30}$
0	0	0	0	0	0	0
	$\frac{6N}{5L}$	0	$-\frac{M_{ya} + 11M_{yb}}{10L}$	0	$-\frac{N}{10}$	$\frac{M_{ya}}{10}$
		$\frac{6N}{5L}$	$-\frac{M_{za} + 11M_{zb}}{10L}$	$\frac{N}{10}$	0	$\frac{M_{za}}{10}$
			$\frac{6K}{5L}$	$-\frac{2M_{ya} + 9M_{yb}}{10}$	$\frac{2M_{za} + 9M_{zb}}{10}$	$-\frac{K}{10}$
				$\frac{2N}{15}$	0	$\frac{M_{ya} + 3M_{yb}}{30}$
				$\frac{2N}{15}$	$-\frac{M_{za} + 3M_{zb}}{30}$	$\frac{2K}{15}$

Sym.

3. 数値計算例

(1) 曲げとねじりを同時に受ける単純ばりのねじり変形について、本法による結果と従来の微分方程式による解との比較を図3に示す。ばりの断面諸量等の条件は図中のとおりである。本法による計算では、部材要素数を10要素、断面要素数を256要素に分割した。そのときの計算結果は、図中で示されるように、微分方程式による解に対して非常に良い一致を示している。

(2) 片持ばり、および単純ばりの弾性域での不安定性について、Epstein - Murray の有限要素法による結果と本法による結果との比較を行なったが、紙面の都合上、それらの結果については、発表当日に報告する予定である。

<参考文献>

- 1) 崎元・山尾 「薄肉閉断面ばりの非線形解析」 第35回 土木学会年講概要集 1980. 9
- 2) Epstein & Murray, Int. J. Solid Structures 1976. Vol. 12

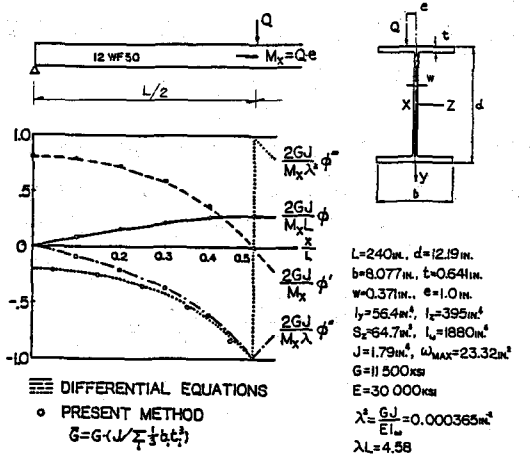


図3 ϕ と ϕ' の微分係数のばり軸方向の変化