

ケーブルの面内非線形振動
- 非抗圧縮力の影響 -

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 原口哲幸

1. 予えがき ケーブルの非線形振動解析には、軸力のみに抵抗する部材として定式化された連続体としての基礎式が使用されている。この場合のケーブルの構成則は引張力にも圧縮力にも抵抗できるものと仮定されている。しかし、ケーブルは圧縮力には抵抗しないので、変動圧縮力が初期張力を越えた場合には、この仮定は成立しなくなる。そこで、ケーブルの非線形振動を取扱う場合に、非抗圧縮力の影響を評価しておくことが必要である。本研究では、偏平ケーブルの面内非線形振動の連続体としての運動方程式を差分法の陽公式を用いて離散化して非抗圧縮力の評価方法と、数値結果を報告するものである。

2. 運動方程式 H. Irvine³⁾ のテキストにしたがって、

ケーブルの微小要素 ds の面内変形に関する静的・動的平衡方程式を示せば、次のとおりである。

$$\text{静的平衡: } \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (1) \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = -mg \quad (2)$$

$$\text{動的平衡: } \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dz}{ds} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - mg - p(s, t) \quad (4)$$

ここに、 T : ケーブルの静的張力、 h : 活荷重による変動張力、 m : ケーブルの単位長さあたりの質量、 g : 重力の加速度、 s, x, z : 初期形状、 s : 長さに沿った座標、 u, w : 水平・鉛直変位、 p : 荷重強度

サグ比 $\delta = \frac{1}{2}l$ が $1/8$ 以下の偏平ケーブルと仮定すると、

$$T \frac{dx}{ds} = H_0 = \text{一定}, \quad T \frac{dz}{ds} = -\text{一定}(h \text{ 平均})$$

$$\tau = \frac{4T}{l^2} x(l-x): \text{放物線}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} dx \approx dx$$

ここに、 l : スパン長

したがって、式(3)、(4)は次のように簡略化される。

$$(H_0 + h) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$(H_0 + h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{8T}{l^2} h - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, t) = 0 \quad (6)$$

3. 変動張力の決定

$$\text{変形前の微小要素の長さ } ds = dx^2 + dz^2 \quad (7)$$

$$\text{変形後の微小要素の長さ } ds' = (dx + du)^2 + (dz + dw)^2 \quad (8)$$

偏平ケーブルの仮定より $u \ll w$ であるから、軸ひびき ε は次のように与えられる。

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$

応力-ひびき関係式 ($\varepsilon = \frac{1}{EA} T$)、 $T = h \frac{ds'}{dx}$ および

$1/ds = dx/ds \cdot d/dx$ より、式(9)を用いて変動張力 h が次のように求められる。

5. 差分法による離散化 差分法の陽公式を用いて、式(4)を離散化し、式(5)の定積分を Simpson の $1/3$ 公式による

$$h \left(\frac{ds'}{dx} \right) / EA = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

両辺を $0 \sim l$ まで積分して、両端で $u=0$ であることを考慮すると、

$$h = \frac{EA}{LE} \left\{ \frac{mg}{He} \int_0^l w dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \quad (11)$$

$$\text{ここに、} LE = (1 + 8\delta^2) l$$

式(11)のように、偏平ケーブルの場合、変動張力 h は鉛直変位 w のみによって定まる。

したがって、ケーブルに作用する全水平張力は

$$H = H_0 + h \quad (12)$$

4. 無次元化 偏平ケーブルの面内非線形振動を考える場合、非線形項を介して連成の生じない面内水平変位の運動方程式は分離することができる。したがって、本研究では、式(6)と式(11)を用いてケーブルの面内非線形応答を評価すればよい。

次のような記号を導入する。

$$\bar{w} = w/l, \quad \bar{x} = x/l, \quad \tau = \omega_1 t \quad (13)$$

$$\text{ここに、} \omega_1 = \frac{H_0}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2: \text{弦の第1次固有円振動数}$$

したがって、式(6)、(12)は次のように無次元化される。

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} - \frac{H(\tau)}{\pi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{8T}{\pi^2} \left(\bar{H}(\tau) - 1 \right) - \frac{8T}{\pi^2} \bar{p}(\bar{x}, \tau) = 0 \quad (14)$$

$$\bar{H}(\tau) = 1 + \frac{8T}{1 + 8\delta^2} \left(8\delta \int_0^1 \bar{w} d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right) \quad (15)$$

ここに、 $\bar{p} = p/mg$ 、 $k^2 = EA/He$: ケーブルの総波一横波伝播速度比

式(14)、(15)に含まれる無次元パラメーターはサグ比 δ と伝播速度比 k の2個である。

数値積分に置き換える。なお、ケーブルの始点と終点では前進・後退差分をそれぞれ使用する。これらの離散化より、 i 点の $j+1$ 時間のケーブルの応答 $\bar{w}_{i,j+1}$ が次のように得られる。

$$\bar{w}_{i,j+1} = 2\bar{w}_{i,j} - \bar{w}_{i,j-1} + \frac{\bar{H}(z_j)}{\pi^2} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} \right)^2 (\bar{w}_{i+1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i-1,j}) + \Delta t^2 \frac{8g}{\pi^2} (-\bar{H}(z_j) + 1) + \frac{8g}{\pi^2} \Delta t^2 \bar{p} \quad (16)$$

$$\text{ここに、} \bar{H}(z_j) = 1 + \frac{g^2}{1+8g^2} \left(8\alpha A_j + \frac{1}{2} B_j \right), \quad A_j = \frac{\Delta z}{3} (\bar{w}_{0,j} + 2 \sum_{n=2,4}^{M-2} \bar{w}_{n,j} + 4 \sum_{n=3}^{M-1} \bar{w}_{n,j} + \bar{w}_{M,j})$$

$$B_j = \frac{1}{12\alpha \Delta x} \left\{ 4\bar{w}_{1,j}^2 + 2 \sum_{n=1}^{M-2} (\bar{w}_{n+1,j} - \bar{w}_{n-1,j})^2 + 4 \sum_{n=1}^{M-1} (\bar{w}_{n,j} - \bar{w}_{n+1,j}) + 4\bar{w}_{M,j}^2 \right\}$$

Δz : 空間分割間隔、 Δt : 時間分割間隔、 M : 分割数 (偶数)

式(16)の差分式は条件付安定で、RichtmyerとMortonに与えられる安定条件は $\Delta z/\Delta x < \pi$ である。

6. 非抗圧縮力の処理 本研究では非抗圧縮力の評価を次式を用いて行う。 $\bar{H}(z_j) = 0$ ($\bar{H}(z_j) < 0$ のとき) (17)

この場合ケーブルの要素は車力下で初速度、変位を与えられた質点と同じ挙動を示す。

Table 1 Compression range

γ	lower	higher
0.021	0.025	0.026
0.022	0.024	0.031
0.023	0.023	0.030
0.024	0.011	0.032
0.026	0.010	0.034
0.030	0.011	0.073

7. 数値計算例 ケーブルの面内非線形自由振動 ($\bar{p}=0.0$) を空間の分割数 50 のもとに評

価する。初期条件として、微小振動幅から得られるケーブルの1次対称固有振動形を種々の振幅レベルに設定した後、初速度零で解放した場合の時間応答を求めることにより、非線形自由振動解析を行った。非線形振動系では振幅とともに振動形が変化するため、与えられた一定の固有振動形のもとで自由振動をすることは不可能であり、このように取り扱えば振幅の増大とともに誤差が増加していく。伝播速度比 $\delta=30$ の場合に

ついて、この計算法で得られたケーブルに圧縮力が生ずる振幅比 (振幅/スパン長さ) の下限、上限値とサブ比の関係を Table 1 に示す。サブ比 δ が 0.021 付近のケーブルから特定の振幅比の範囲で圧縮力が生じはじめる。 δ が 0.03 を越えると容易に圧縮力が生じる。サブ比の大きいケーブルでは初期張力が小さいためと形状変化の項が効いてくるためと予想される。Fig. 1, 2, 3 に $\delta=0.04$ のケーブルの振幅比 0.02 の場合のケーブル中央点の時間応答、張力の変動および振動形の変化を示す。Fig. 1 および 2 において、実線が非抗圧縮力を考慮した場合で、破線がこれを無視した場合の結果である。Fig. 2 に示すように、圧縮力の領域に入ると、張力の変動に高調波が乗ってくる。この変動は非抗圧縮力を無視した場合に著しい。この原因は Fig. 3 に示すように、ケーブルに圧縮力が作用すると、端部から空間振形が乱れてきて、この乱れが全体に伝わるためである。この点に対する考察および強制振動の結果、その他は講演時に発表する。

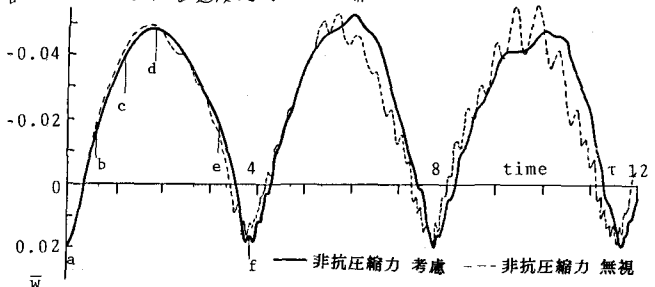


Fig.1 Time history of vertical displacement $\bar{w}$

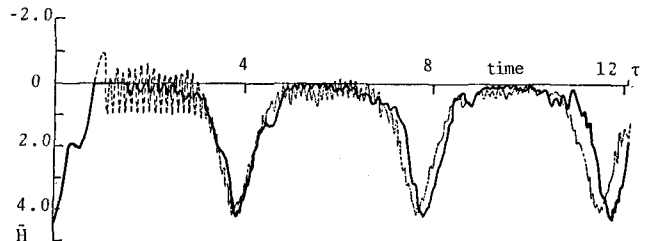


Fig.2 Time history of cable tension $\bar{H}$

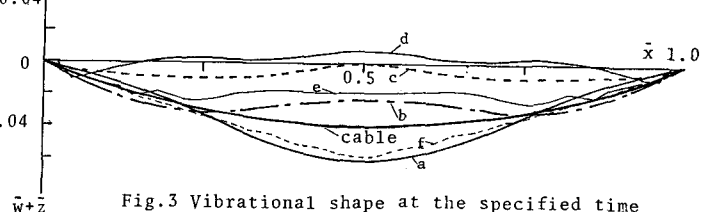


Fig.3 Vibrational shape at the specified time

参考文献 1) 山口他: 土木学会論文報告集, 第309号, PP.37~45, 1981, 2) 高橋: 土木学会論文報告集, 第338号, 1983, 3) Irvine, H.H.: Cable Structures, The MIT Press, 1981, 4) Richtmyer, R.D.: Difference Methods for Initial Value Problems, Interscience Publishers, 1957