

任意の相関を有する不規則分布荷重を受けるアーチ部材の解析

長崎大学大学院 学生員 ○吉田 啓三
長崎大学工学部 正員 岡本 隆敏

1. はじめに 構造物の信頼性解析を行なうためには、不確定な荷重による確率的な応答解析が基礎となる。不規則な分布荷重が作用する静的な解析では、確率微分方程式が境界値問題となるために、これまで効果的な手法が確立していないと考えられる。著者らは、伝達マトリックス法と共分散方程式に拡張して、各種のはりおよび、連続はり系に任意の相関を有する不規則分布荷重が作用した場合の分散・共分散応答を求める手法をすでに報告した⁽³⁾。本報告では、アーチ部材に雪荷重のような偏在荷重が作用した場合を想定し、アーチ部材に任意の相関を有する不規則な分布荷重が載荷した場合の静的応答解析の手法を提案した。数値計算例として、分布荷重を白色雑音過程でモデル化した場合；自己相関関数が指数関数および指数余弦関数で表わされる確率過程でモデル化した場合について、アーチ部材の変形および断面力の応答の変動解析を行なった。

2. アーチ部材-荷重系の状態空間表示

図-1のように、分布荷重が作用するアーチ部材において、アーチ部材の半径方向の荷重強度を λ 、接線方向の荷重強度を μ と表わすと、 x

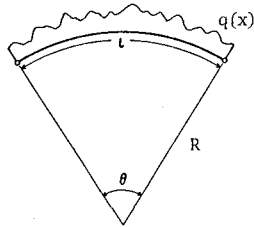


図-1 不規則分布荷重が載荷するアーチ部材

点での接線方向変位 $w(x)$ 、半径方向変位 $u(x)$ 、たわみ角 $\phi(x)$ 、曲げモーメント $M(x)$ 、軸力 $N(x)$ 、およびせん断力 $Q(x)$ は、次のような状態ベクトル

$$Y(x) = [w(x) \ u(x) \ \phi(x) \ M(x) \ N(x) \ Q(x)]^T \quad (1)$$

を用いて、状態空間で次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} dY(x)/dx &= A_Y(x)Y(x) + F_Y(x) \quad (0 \leq x \leq l) \\ \text{境界条件 ; } Y(0) &= Y_0, \quad Y(l) = Y_l \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

荷重系モデルの構成 不規則分布荷重 $g(x)$ を、正規性定常確率過程 $r(x)$ とその分散の空間的变化を示す確定関数 $g(x)$ の積で表わされる非定常確率過程でモデル化する。

$$g(x) = r(x) \cdot g(x) \quad (3)$$

パワースパクトル密度 $S_r(\omega)$ または自己相関関数 $R_r(\lambda)$ が得られた場合、その定常確率過程は、状態ベクトル

$$Z(x) = [Z_1(x) \ \dots \ Z_n(x)]^T \quad (4)$$

で表わされる荷重系

$$\left. \begin{aligned} dZ(x)/dx &= A_Z Z(x) + B_Z w(x) \quad r(x) = C_Z Z(x) \\ \text{境界条件 ; } Z(0) &= Z_0, \quad Z(l) = Z_l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の定常解過程で表わすことができる。ここに、 $w(x)$ は白色雑音過程である。

アーチ部材-荷重系の方程式 アーチ部材-荷重

系の状態変数を

$$X(x) = [Y(x) \ Z(x)]^T \quad (6)$$

で表わすと、アーチ部材-荷重系の方程式は

$$\left. \begin{aligned} dX(x)/dx &= A_X(x)X(x) + F_X(x) \quad (0 \leq x \leq l) \\ \text{境界条件 ; } X(0) &= X_0, \quad X(l) = X_l \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

で表わすことができる。 $F_X(x)$ は正規性白色雑音過程ベクトルとなり、その共分散は次式で与えられる。

$$E[F_X(x_1) F_X(x_2)^T] = Q_X(x_1) \delta(x_1 - x_2) \quad (8)$$

3. 境界条件と境界マトリックス

アーチ部材の左端では、回転支点および固定支点に対してそれぞれ $[C_0 \ N_0 \ Q_0]^T$ および $[M_0 \ N_0 \ Q_0]^T$ の自由度がある。これを初期ベクトルと称し Y_0 で表わすと、左端境界条件は次式で表わされる。

$$Y_0 = B_Y \tilde{Y}_0 \quad (9)$$

アーチ部材-荷重系に対して、次のような左端境界条件と右端境界マトリックスを定義する。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= B_X \tilde{X}_0, \quad X_l = [Y_l \ Z_l]^T, \quad \tilde{X}_l = [\tilde{Y}_l \ Z_l]^T \\ B_X &= \begin{bmatrix} B_Y & 0_{n3} \\ 0_{n3} & I_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

右端も同様に、回転支点および固定支点に対してそれぞれ終端ベクトル $\tilde{Y}_l$ は、 $[w_l \ u_l \ M_l]^T, [w_l \ u_l \ \phi_l]^T$ で表わされる。これを用いると右端境界条件は次式で表わされる。

$$B_Y \tilde{Y}_l = \tilde{Y}_l = 0_{31} \quad (11)$$

アーチ部材-荷重系に対して、次のような右端境界条件と右端境界マトリックスを定義する。

$$\left. \begin{aligned} B_X' X_L &= \tilde{X}_L, \quad X_L = [Y_L \quad Z_L]^T, \quad \tilde{X}_L = [O_{31} \quad Z_L]^T \\ B_X' &= \begin{bmatrix} B_{11}' & O_{3n} \\ O_{n6} & I_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

4. 不規則応答解析

アーチ部材-荷重系の共分散 $R_X(x)$ は次のように分割される。

$$R_X(x) = \begin{bmatrix} R_Y(x) & R_{YZ}(x) \\ R_{ZY}(x) & R_Z(x) \end{bmatrix} \quad (13)$$

アーチ部材の共分散応答 $R_Y(x)$ は、アーチ部材-荷重系の共分散応答 $R_X(x)$ の要素として得られる。アーチ部材-荷重系の方程式(7)式の解過程は、線形微分方程式の理論より次式で与えられる

$$X(x) = \Phi_X(x, 0) X_0 + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (0 \leq x \leq l) \quad (14)$$

アーチ部材-荷重系の共分散方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X(x)^T + \Phi_X(x, 0) E [X_0, F_X(x)^T] + E [F_X(x) X_0^T] \Phi_X(x, 0)^T + Q_X(x) \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\text{初期条件 ; } R_X(0) = R_{X0} \quad (15)$$

この微分方程式を解くことにより、各分散応答が得られる。この微分方程式を解くためには、1)初期条件と外力の相関関数 2)初期条件の共分散を求める必要があるが、これらの処理は、ほぼはりの場合のアルゴリズムで実施できる。

5. 数値解析と考察

構造系モデルとしては、2ヒンジアーチ、両端固定アーチを考慮、荷重モデルとしては、白色雑音過程と指数関数型および指数余弦関数型の相関関数を有する確率過程を考えた。ここでは2ヒンジアーチの指数関数型の計算結果を示している。図-2は、それぞれの応答の標準偏差を示したものである。ここに k は、 $k = \Omega/2\pi l$ で規定されるパラメーターであり、分布荷重の強度は $\sigma^2 l/g^2 = 1$ (g は等分布荷重の荷重強度)で規定した。 $k \rightarrow 0$ では、等分布荷重の強度が不規則に変化する応答に漸近し、 $k \rightarrow \infty$ では、白色雑音過程による応答に漸近する。しかしこの荷重モデルとして、 k の値にかかわらず荷重のパワーを一定 g^2 にしているので、 $k \rightarrow \infty$ の場合の応答レベルは低下する。図-3は、 k の変化によって曲げモーメントの最大応答の値が変化する様子を示したものである。白色雑音過程および指数余弦関数型の計算結果については、講義会当日、発表する予定である。
[参考文献] (1)高岡他,土木学会論文報告集第334号,1983年6月 (2)山崎徳正,構造力学,共立出版 (3)岡林他,土木学会論文報告集第341号,1984年1月

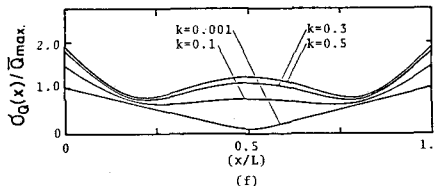
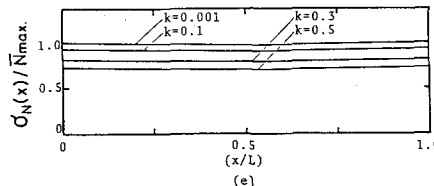
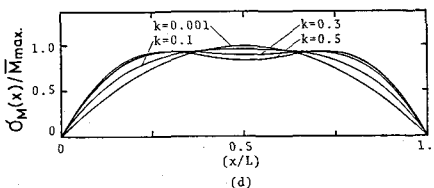
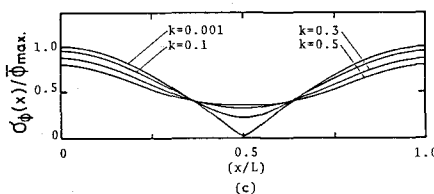
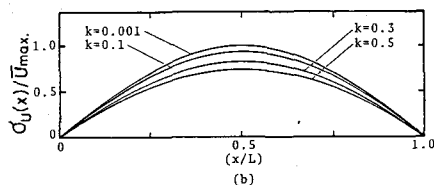
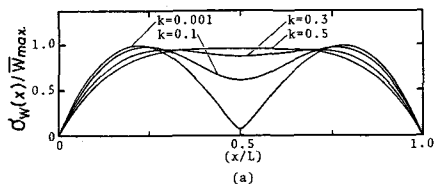


図-2 応答の標準偏差

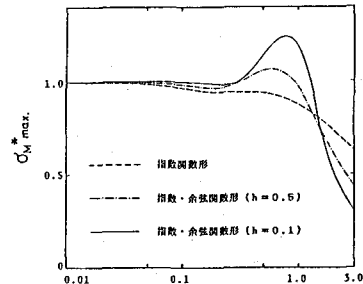


図-3 k による最大応答の変化