確率有限要素法による骨組構造系の解析

長崎大学工学部　学生員　○山崎　秀実
長崎大学工学部　正　員　　岡林　隆敏

1．はじめに

構造物の信頼性解析を行うためには、外力の変動に対する構造系の応答を評価する必要がある。不規則応答解析による理論は、これまで不規則振動論を中心に発達してきた。しかし、構造物を設計する場合、静的な不確定な荷重が作用する場合が多くある．これらは、道路橋の活荷重、事務所・倉庫の活荷重及び雪荷重等である。静的な問題では境界値問題になるために、これまで Green 関数による解析[1]が用いられてきたが、この方法では非常に単純な問題しか解くことができない．本研究では、これらの問題の汎用的な解法として確率有限要素の理論を提示すると共に、数値解析例としてトラスとはりの解析を行った。確率有限要素についてはいくつかの方法が提案されている[2][3]が、これらは材料定数及び境界条件が不確定なものである．本研究では、外力が不確定な場合、構造系の応答の分散・共分散を解析するものである。

2．有限要素法の概要

節点変位と節点荷重を$\mathbb{x}$及び$\mathbb{P}$とすると、節点方程式は

$$\mathbb{K}\mathbb{x}=\mathbb{P} \tag{1}$$

で与えられる。ここに、$\mathbb{K}$は構造全体の剛性マトリックスである。この方程式は、境界条件の処理をした節点変位$\mathbb{x}^*$と節点荷重$\mathbb{P}^*$により解くことができる。ここで、$\mathbb{K}^*$は境界の処理をした剛性マトリックスである。

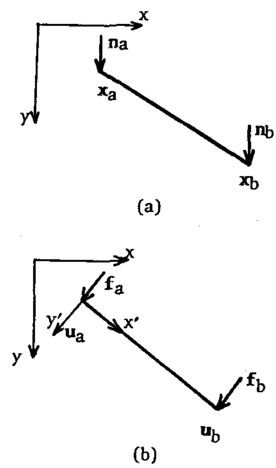
$$\mathbb{K}^*\mathbb{x}^*=\mathbb{P}^* \tag{2}$$

次に、図－1に示したように、座標変換マトリックス$\mathbb{C}_i$により全体座標系を局所座標系に変換する。

$$\begin{aligned} \mathbb{n}_a^i&=\mathbb{C}_i\mathbb{f}_a^i & \mathbb{n}_b^i&=\mathbb{C}_i\mathbb{f}_b^i \\ \mathbb{x}_a^i&=\mathbb{C}_i\mathbb{u}_a^i & \mathbb{x}_b^i&=\mathbb{C}_i\mathbb{u}_b^i \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbb{f}_a^i$, $\mathbb{u}_a^i$はi部材の断面力と変位である。部材剛性マトリックスと節点変位より断面力を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} k_{aa}^i & k_{ab}^i \\ k_{ba}^i & k_{bb}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{u}_a^i \\ \mathbb{u}_b^i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{f}_a^i \\ \mathbb{f}_b^i \end{bmatrix} \tag{4}$$



図－1　全体座標と局所座標

3．有限要素法の確率解析への適用

(1)式において、外力$\mathbb{P}$が確率変数であると、変位$\mathbb{x}$も確率変数となる。

(a) 平均値応答　　$\mathbb{K}E[\mathbb{x}]=E[\mathbb{P}]$　　(5)

$E[\ ]$は平均値の演算子である。

(b) 分散・共分散応答

平均値回りの変動を$\sim$の記号で表すと、

$$\tilde{\mathbb{x}}=\mathbb{x}-E[\mathbb{x}]\quad,\quad\tilde{\mathbb{P}}=\mathbb{P}-E[\mathbb{P}] \tag{6}$$

となる。$\tilde{\mathbb{x}}$と$\tilde{\mathbb{P}}$の分散・共分散は、次式で関係づけられる。

$$\mathbb{K}E[\tilde{\mathbb{x}}\tilde{\mathbb{x}}^T]\mathbb{K}^T=E[\tilde{\mathbb{P}}\tilde{\mathbb{P}}^T] \tag{7}$$

共分散節点方程式より変位の分散・共分散$E[\tilde{\mathbb{x}}\tilde{\mathbb{x}}^T]$が(1)式と(2)式と同じ処理により求められる。$i$部材と$i$部材の変位と断面力の共分散は、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
&E[\tilde{\mathbb{u}}_a^i\tilde{\mathbb{u}}_a^{iT}]=\mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_a^i\tilde{\mathbb{x}}_a^{iT}]\mathbb{C}_i \\
&E[\tilde{\mathbb{f}}_a^i\tilde{\mathbb{u}}_a^{iT}]=\begin{bmatrix} k_{aa}^i & k_{ab}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_a^i\tilde{\mathbb{x}}_a^{iT}]\mathbb{C}_i \\ \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_b^i\tilde{\mathbb{x}}_a^{iT}]\mathbb{C}_i \end{bmatrix} \\
&E[\tilde{\mathbb{u}}_a^i\tilde{\mathbb{f}}_a^{iT}]=E[\tilde{\mathbb{f}}_a^i\tilde{\mathbb{u}}_a^{iT}]^T \\
&E[\tilde{\mathbb{f}}_a^i\tilde{\mathbb{f}}_a^{iT}] \\
&=\begin{bmatrix} k_{aa}^i & k_{ab}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_a^i\tilde{\mathbb{x}}_a^{iT}]\mathbb{C}_i & \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_b^i\tilde{\mathbb{x}}_a^{iT}]\mathbb{C}_i \\ \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_a^i\tilde{\mathbb{x}}_b^{iT}]\mathbb{C}_i & \mathbb{C}_i^T E[\tilde{\mathbb{x}}_b^i\tilde{\mathbb{x}}_b^{iT}]\mathbb{C}_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{aa}^{iT} \\ k_{ab}^{iT} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(c) 分散・共分散の内挿

状態変数を$\mathbb{X}_i(x)=[U(x)\,V(x)\,\phi(x)\,N(x)\,Q(x)\,M(x)]^T$とすると、$x$点の共分散　$R_x(x)=E[\mathbb{X}(x)\mathbb{X}(x)^T]$は、$i$点の変位と断面力の共分散$R_{ia}=E[\mathbb{X}_{ia}\mathbb{X}_{ia}^T]$より、

$$R_x(x) = \Phi_x(x, 0) R_{ia} \Phi_x^T(x, 0) \tag{9}$$

より得られる。ここに、$\Phi_x(x,0)$ は伝達マトリックス法で用いられる格間伝達マトリックスである。

4．荷重の分散・共分散行列

荷重の分散・共分散行列は、$E[\tilde{P}_i^2]$ と $E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j]$ の要素より構成されている。

(a) 集中荷重の場合

$$\left.\begin{aligned} E[\tilde{P}_i^2] &= \sigma_{P_i}^2 \\ E[\tilde{P}_i \tilde{P}_j] &= \sigma_{P_i} \sigma_{P_j} r_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

により構成する。

表－1　トラス橋の各部材の断面積

(cm²)

member	section	member	section
1	8.138	6	10.500
2	4.666	7	6.103
3	8.138	8	14.000
4	9.333	9	4.069
5	6.103	10	11.666

(b) 分布荷重の場合　図－4 に示したように、分布荷重を集中荷重でモデル化する。$\tilde{P}_k = \int_0^{\Delta l} g(x + l_k)\, x$

Δl は、分割した部材長である。$\tilde{P}_k$ の分散と共分散は、次式で与えられる。

$$E[P_k P_s] = \int_0^{\Delta l}\int_0^{\Delta l} E[g(x_1 + l_k) g(x_2 + l_s)]\, dx_1 dx_2$$

(i) 白色雑音過程の場合　$E[g(x_1) g(x_2)] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2)$

$$E[\tilde{P}_k^2] = \sigma^2 \Delta l \ , \ E[P_k P_s] = 0 \qquad (k \neq s) \tag{11}$$

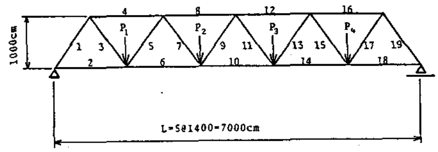
(ii) 指数関数の自己相関を有する確率過程

$$E[g(x_1) g(x_2)] = \sigma^2 e^{-\beta |x_1 - x_2|} \tag{12}$$

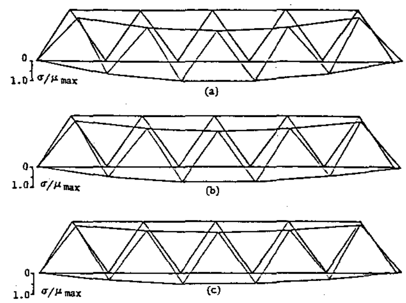
$$\left.\begin{aligned} E[P_k^2] &= \frac{1}{\beta} 2\sigma^2 \left[\Delta l - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta \Delta l})\right] \\ E[P_k P_s] &= \frac{1}{\beta} 2\sigma^2 e^{-\beta |l_s - l_k|} (\cosh \beta \Delta l - 1) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

5　数値計算と考察

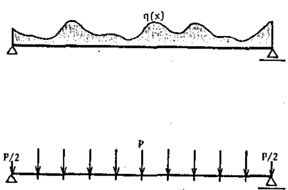
(a) トラスの解析　図-2のトラスの解析を行った。(a),(b),(c)は、それぞれ完全相関 $r_{ij} = 1$、隣の荷重との相関が 0.5 の場合及び独立の場合、それぞれの荷重の変動係数を 1 としたときの変位を示したものである。なお、変位は応答の標準偏差を平均値応答の最大値で規準化した。



図－2　トラス橋の寸法

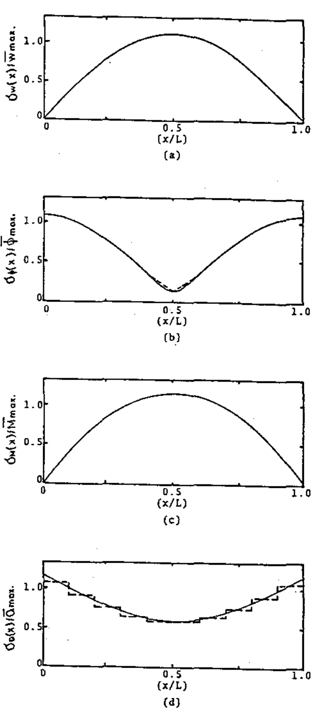


図－3　たわみの変動



図－4　不規則分布荷重のモデル化

(b) 単純ばりの解析　図-4は解析の対象とした単純ばりである。はりを10要素に分割し、分布荷重を集中荷重でモデル化して、各節点に作用させた。図-5は、白色雑音でモデル化された分布荷重による応答を、確率伝達マトリックス法による厳密解と有限要素法による解でししたものである。曲げモーメントとたわみは、図上で識別できない程度に良く一致している。せん断力は、分布荷重を集中荷重でモデル化したために階段状になっている。不規則荷重を受ける構造系の不規則応答を煩雑な計算を行うことなく得られることが確認できた。他の例については講演時に報告する。



図－5　単純ばりの不規則応答
(有限要素法　10分割)

〔文献〕(1) 高岡、他、土木学会論文報告集、第334号、1983年　(2) 中桐、他、日本機械学会論文集（A編）、48巻427号(昭57-3)　(3) E. Vanmarcke, ASCE, Vol. 100, No. EM5, 1983年　(4) 岡林、土木学会論文報告集、第316号、第340号、第341号