IV-12　有限要素法と線形計画法を併用した人口動態予測モデル

九州大学工学部　○学生員　相川 明
九州大学工学部　正　員　樗木 武

1．はじめに　地域あるいは地区計画の策定にあたり、地域細分ゾーンでの人口動態の予測が必要である。これを目的として著者らは文献4～7により新しい予測モデルを提案してきた。すなわち、ポテンシャルフロー的概念により　人口動態の支配方程式を導きFEMによる定式化を行って解析するものである。適用の結果、理論上の妥当性は示されたが、理論の適用に必要なパラナータが　細分ゾーンでは入手困難であるため、大きな地区では人口密度の実績値と一致しても、細分されたゾーンでは精度が悪いところもあり、本法の適用がほんの数年間に限られるなどの問題が残っており、いまだ実用に供するに至ってない。そこで本理論のさらなる改善をはかるものである。すなわち、市区町村単位の大きなゾーンについては、従来より実用に供されているモデルにより精度よく予測値が得られるので、その値を予測段階でのコントロールトータルとして本モデルに入力し、人口密度の最適配分を行なうのが得策と考え、線形計画法の応用により以下の2点を中心に改良するものである。(1) 市区町村単位の総人口をコントロールトータルとして外生的に入力することにより長期にわたる予測を可能とする。(2) 予測値に下限値を設定し、解の発散を防止する。

2．理論展開　**支配方程式**　Darcy則の類似概念により人口移動の運動方程式をたて、さらに、人口の収支を考慮するならば、以下の式が導出される。

$$\nabla^T \mathbb{K}\cdot\nabla\phi + r\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} \text{ ------------- }\langle 1\rangle$$

境界条件1　$\phi = \phi_0$

境界条件2　$\mathbb{K}\cdot\nabla\phi + q = 0$

ここに、x, y；空間座標(km)，t；時間座標(年)，$\nabla = [\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}]^T$，$\phi$；人口密度(人/km)，$\mathbb{K}$；人口移動性係数 $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$ (km²/年)，r；人口負荷率＝人口増加率＋対象圏域外移動率 $r = b - d + u - w$，b；出生率，d；死亡率，u；圏域外よりの転入率，w；圏域外への転出率

式〈1〉の左辺第1項は、圏域内相互での人口移動を表わしており、ポテンシャルフローのもとで算出される値である。第2項は、自然増と圏域外との移動を表わしており、外生的に予見されるものとする。右辺は人口の増加量をあらわす。

支配方程式の空間座標に関する離散化　tをある時点に固定するならば、式〈1〉の右辺は一定であるとみなせるので、空間座標のみについて汎関数を求め停留値問題に帰着させる。圏域内を三角形要素に切り、線形の形状関数を仮定し、式〈1〉を展開すると以下のようなtによる一階微分項を含むマトリクス－ベクトル表示を得る。

$$[G]\{\phi\} + [H]\frac{\partial}{\partial t}\{\phi\} = 0 \text{ ----------- }\langle 2\rangle$$

ここに，要素数をR，要素面積をA，形状関数を$N_\beta = a_\beta + b_\beta x + c_\beta y$と表すと上記マトリクス[G]，[H]は次のように

$$[G] = \sum_{e=1}^{R}\left[\frac{1}{4A^e}(k_x^e \mathbb{B}^e + k_y^e \mathbb{C}) - \frac{A^e}{12} r^e \mathbb{E}\right],\ [H] = \sum_{e=1}^{R}\frac{A^e}{12}\mathbb{E}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 b_1 & & \text{SYM.} \\ b_1 b_2 & b_2 b_2 & \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3 b_3 \end{bmatrix},\ \mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 c_1 & & \text{SYM.} \\ c_1 c_2 & c_2 c_2 & \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3 c_3 \end{bmatrix},\ \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

時間座標に関する離散化　隣りあう2つの時間段階I II について時間軸に関する形状関数として1次式

$$\phi_t = [N_{\mathrm{I}}\ N_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix} \{\phi\}_{\mathrm{I}} \\ \{\phi\}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}$$

を仮定する。ガラーキン法を適用することにより、式〈2〉は　次式に書き改められる。なお$\{\phi\}_{\mathrm{I}}$は既知であるから、重みつき残差方程式は、N_{II}についてのみ考慮すれば十分である。

$$\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} N_{\mathrm{II}}\left([G][N_{\mathrm{I}}\ N_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix} \{\phi\}_{\mathrm{I}} \\ \{\phi\}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} + [H]\left[\frac{\partial N_{\mathrm{I}}}{\partial t}\ \frac{\partial N_{\mathrm{II}}}{\partial t}\right]\begin{Bmatrix} \{\phi\}_{\mathrm{I}} \\ \{\phi\}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}\right) dt = 0$$

すなわち、

$$\left([H] + \frac{2\Delta t}{3}[G]\right)\{\phi\}_{\mathrm{II}} = \left(-[H] + \frac{\Delta t}{3}[G]\right)\{\phi\}_{\mathrm{I}} \text{ ······ }\langle 3\rangle$$

ここに、Δtは時間ステップである。時間段階I，IIにつ

いてΦが既知の場合は、N_Iについても重みつき残差方程式をたて　2つの式を連立させることにより次式を得る。

$$\left([H]+\frac{2\Delta t}{3}[G]\right)\{\phi\}_{III}=[H]\{\phi\}_{II}-\frac{\Delta t}{3}[G]\{\phi_I-4\phi_{II}\}\cdots\cdots\langle 3\rangle'$$

式〈3〉あるいは式〈3〉'を時間の各段階について逐次適用することにより　目標とする時間段階の人口密度を予測することが可能である。

線形計画法による定式化　対象圏域内にある市区町村単位の大きな地区S_kについて考えるものとする。外生的に与えられる総人口をP_kとおく。〈3〉あるいは〈3〉'のままの形ではP_kが入力できないので　目的関数を設定し線形計画問題にとり入れる。目的関数としては、本モデルの予測人口すなわちS_kに属するΦの積分値とP_kとの差の総和を最小化させる。すなわち〈3〉,〈3〉'が次のように定式化できる。

最小化問題

目的関数　$Z=\sum_{k=1}^{K}\left|\int_{S_k}\phi(x,y;t)\,ds-P_k\right|\cdots\langle 4\rangle$

制約条件　$[C]\{\phi\}=\{F\}$

$\{\phi\}\geqq\{\phi_L\}$

ここに、S_k；市区町村単位の地区，K；地区数，P_k；外生的に与えられるS_kの総人口，[C]；式〈3〉,〈3〉'の左辺マトリクス，{F}；式〈3〉〈3〉'の右辺ベクトル，$\{\phi_L\}$；人口密度の下限値．

このままでは、解析がやや困難であるため、式〈4〉の目的関数のP_kと積分の差を

$$\varepsilon_k=\left|P_k-\int_{S_k}(x,y;t)\,ds\right|\text{———————}\langle 5\rangle$$

とおき、目的関数を次のように書き改める。

$$Z=\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k$$

式〈5〉は等式制約条件式としてとり入れる。式〈4〉第2式の等式の処理のため人為変数$\varepsilon_{K+1}\sim\varepsilon_{K+N}$を導入する。式〈5〉の積分は、形状関数に1次式を仮定していることにより、簡単にマトリクス表示できる。そのマトリクスを[A]とおく。さらに下限値の処理にあたり

$$\{\phi\}=\{\phi_L\}+\{\delta\}\quad,\ \{\delta\}\geqq 0$$

とおく。以上のことにより、式〈4〉は　次のような線形計画最小化問題に帰着できる。

線形計画最小化問題

目的関数　$Z=\{b\}^T\{\varepsilon\}$　———————〈6〉

制約条件　$\begin{Bmatrix}[C]\\ [A]\end{Bmatrix}*\{\delta\}+\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\{F\}'\\ \{P\}'\end{Bmatrix}$

非負条件　$\{\delta\}\geqq 0$　，$\{\varepsilon\}\geqq 0$

ここに、{b}は{ε}の係数ベクトルで、$b_1\sim b_K$　はBig-Mで残りは　　1である。第2式右辺は　次式で与えられる。

$$\{F\}'=\{F\}-[C]\{\delta_L\}\ ,\ \{P\}'=\{P\}-[A]\{\delta_L\}$$

3. 解析例

対象圏域は福岡市であり、昭和45年と昭和50年の国勢調査の結果をもとにして昭和55年の人口を予測した。外生的に与える総人口P_kについては、55年の区単位の人口をそのまま入力した。2つの分割形態A，Bで解析を行い、人口密度について計算値と実績値の相関係数を比較したのが表1である。表中FEMは文献(6)によるものであるが、相関係数は高いものの、一部に人口密度が負値になるなどの矛盾を含んでいる。これに対し、本法では分割形態A、Bともに　節点人口が負値をとる等の矛盾点はなくなっている。しかし、精度の面でかなり低下しており、その原因は、区の総人口に関する条件式を満足させるために無理に解をゆがめたためと考えられる。この問題に対処するには、人口密度の下限値の設定と合せて、より詳細に吟味する必要があり、この点について目下検討中である。

表－1　相関係数による比較

分割形体	FEM －LP	FEM
A	0.9 1 2	0.9 7 2
B	0.8 3 8	0.9 5 6

参考文献

1. Futagami, T., "Finite Element & Linear Programming Method and Water Pollution Control", Proceedings, 16th Congress of the International Association for Hydraulic Research, Vol.3, c7, 1975,
2. 二神種弘 "BEMと数理計画法の併用による微分方程式系の最適制御" 数理科学 No.234, Dec 1982
3. Gudehus, G., "Finite Element in Geomechanics" pp.254-294
4. 橋本、永尾, "人口の域内流動モデルとその適用" 土木学会第34回年次学術講演会概要集　1979.10
5. 橋本、永尾, "ポテンシャルフロー的人口動態論における諸定数の決定について" 昭和55年度 土木学会西部支部研究発表会　1980.2
6. 橋本、永尾, "人口動態に関する研究" 昭和56年度 土木学会西部支部研究発表会　1981.2
7. 相川、橋本, "人口動態に関する研究　ΔDによる場合" 昭和57年度西部支部　1983.2