

II-73

乱流の水理模型実験およびFEM解析

九州産業大学 正会員 加納 正道、赤坂 順三

九州産業大学 学生員○西村 顕治、大田 浩司

九州産業大学 吉田日出男、山村 透

1. まえがき 河川や海域の流れなどは、ほとんどが乱流である。本研究の解析の対象とするのは、アクリル製の水理模型の乱流であり、この領域には壁面と自由水面を有する。乱流のFEM計算法については、四角形二次要素(図-1)によるReynolds方程式の定常計算および三角形一次要素(図-2)による渦度等方程式の非定常計算を行なってみた。

2. 基礎方程式 渦度 ω および流れ関数 ψ を次のように表現し、

$$\omega = \partial V / \partial x - \partial U / \partial y \cdots (1), \quad V = -\partial \psi / \partial x, \quad U = \partial \psi / \partial y \cdots (2)$$

Reynolds方程式と連続の式に式(1)、(2)を代入して整理すれば渦度等方程式¹⁾(3)、(4)を得る。 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \cdots (3)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \epsilon_x) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \epsilon_y) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right\} \cdots (4)$$

3. Galerkin法による定式化 (i) Reynolds方程式等の四角形FEMによる積分 Reynolds方程式と連続の式に重みつき残差法により重み δu 、 δv 、 δp をかけ計算領域で積分し、グリーンの定理により部分積分を行ない定式化を行なった。²⁾ (ii) 渦度等方程式の三角形FEMによる積分 (i)と同様の操作で式(3)、(4)に重み $\delta \omega$ 、 $\delta \psi$ をかけ計算領域で積分を行ない、 ω 、 ψ を形状関数 N_i と節点値 ω_i 、 ψ_i で $\omega = \sum N_i \omega_i$ 、 $\psi = \sum N_i \psi_i$ $i=1, 2, 3$ と表わし代入して整理すれば式(5)、(6)となる。

$$\delta \omega^n \left[\int_r N_i N_j \omega_i d\Omega - \int_r N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \psi_i \frac{\partial N_k}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} \psi_j \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \omega_j d\Omega + \int_r \epsilon_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \omega_j d\Omega \right] \\ = \delta \omega^n \int_r N_i \epsilon_i \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma \cdots (5) \quad \delta \psi^n \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \psi_j d\Omega - \int_r N_i N_j \omega_j d\Omega \right] = -\delta \psi^n \int_r N_i \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \cdots (6)$$

ここに、 ω_i は時間微分項、 N_i は形状関数である。

4. 境界条件 境界条件は、鉛直水流出口面、鉛直壁面、底面壁面および自由水面である。 n は壁に対して法線方向を表わし、固定壁の値に B 、境界層界面の値に Cr 、境界より一つ内側の点を N として検討する。(i)流速条件 固定境界は、アクリル板なので水流は滑面の流れとなり、Prandtlの理論およびNikuradseの実験から、滑面での水流の平均流速は次式で示される。

$$U/U_* = y U_* / \nu \cdots \text{境界層内}, \quad U/U_* = (1/\kappa) \log y U_* / \nu + \text{const} \cdots \text{境界層外} \cdots (7)$$

式(7)での U は、壁面に沿う流れの平均流速、 y は壁に直交する方向、 κ はカルマン定数、 U_* は摩擦速度である。 u 、 v 、 $\partial u / \partial n$ について検討すれば式(8)、(9)となる。 $u_B = v_B = v_{\text{水面}} = 0, \quad u_{\text{鉛直壁}} = v_{\text{底面}} = 0 \cdots (8)$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_B = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\text{底面}} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{底面}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{鉛直壁}} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\text{鉛直壁}} = 0 \end{array} \right., \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\text{水面}} = 0 \cdots (9)$$

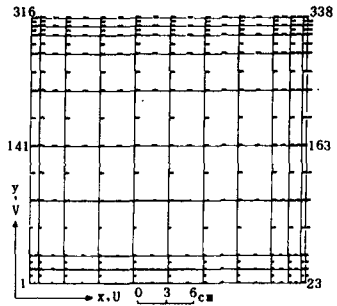


図-1 四角形要素分割

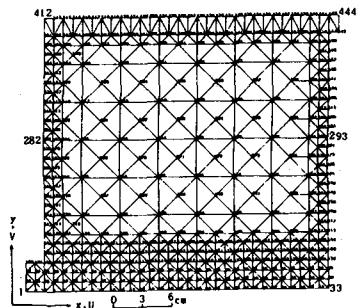


図-2 三角形要素分割

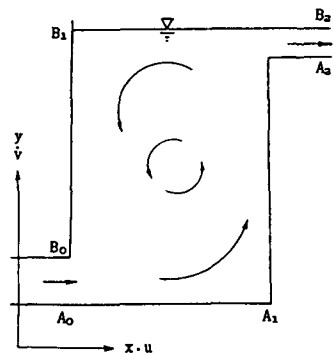


図-3 解析境界

(ii) 流れ関数の条件 図-3の地点名を参照して $\psi_{A0} = 0$ とおけば $\psi_{A0A1A2} = 0$, $\psi_{B0B1B2} = \psi_{B0} = Q$ となり、 $\partial\psi/\partial n|_B$ を検討すれば式(10)となる。

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_B = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{\text{船直壁}} = -v|_{\text{壁}} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_{\text{底面}} = u|_{\text{底面}} = 0 \end{array} \right. \frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_{\text{水面}} = u|_{\text{水面}} = \text{水面流速} \quad \left\{ (10) \right.$$

(iii) 渦度の条件 ω_B , ω_{Cr} , $\partial\omega/\partial n$ について式(1)、(7)より検討すれば式(11)、(12)となる。¹⁾

$$\omega_B = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\text{船直壁}} = \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{\text{船直壁}} \\ \omega_{\text{底面}} = -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\text{底面}} \\ \omega_{\text{水面}} = -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\text{水面}} \end{array} \right\}$$

$$\omega_{Cr} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\text{船直}Cr} = \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{\text{船直}Cr} \\ \omega_{\text{底面}Cr} = -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\text{底面}Cr} \end{array} \right\} \dots (11)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\omega}{\partial x}\bigg|_{\text{船直壁}} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\bigg|_{\text{船直}Cr} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\bigg|_{\text{境界層内}} = 0 \\ \frac{\partial\omega}{\partial y}\bigg|_{\text{底面}} = \frac{\partial\omega}{\partial y}\bigg|_{\text{底面}Cr} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{\text{境界層内}} = 0 \end{array} \right\} \dots (12)$$

式(11)では与えていない ω_B , ω_{Cr} を得るために B と N の距離を l として次式中の添字 B は Cr と読み換えるものとする。固定壁、境界層界面上でテラー展開して、 $\partial\omega_B/\partial n = (\omega_B - \omega_N)/l$ と近似した場合 $\omega_B = \frac{3}{l^2}(\psi_B - \psi_N + u_B l) - \frac{\omega_N}{2}$ となるが、式(12)に記したように $\partial\omega/\partial n$ はゼロとなるから、式(1)、

(11)、(12)から渦度の境界条件式は式(13)とした方が妥当であろう。 $\omega_B = \frac{2}{l^2}(\psi_B - \psi_N + u_B l) \dots (13)$

5. むすび 本研究のようにアクリル板を壁面とする場合 0.5mm 程度の極くうすい境界層をもつものと推察され、本研究では、境界層界面を解析境界と設定し固定壁を含めずに解析する方法をとった。四角形要素による定常解は、図-4のようになり実験実測値図-7とほぼ同様の値となり、三角形要素による非定常解は、2秒で図-5、30秒程度で図-6のようになり図-7とほぼ等しい結果を得た。これより時間の経過とともに流れが、定常の流れとなることがわかる。

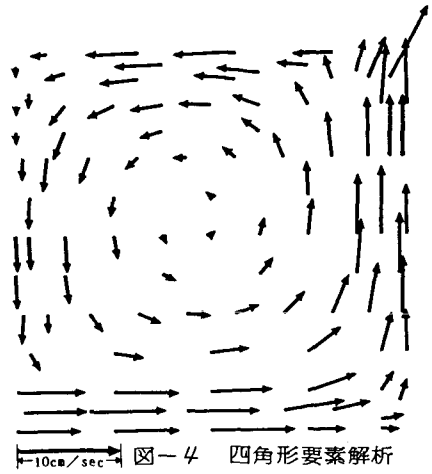


図-4 四角形要素解析

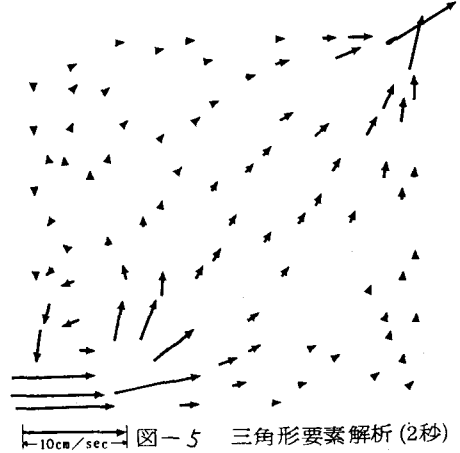


図-5 三角形要素解析(2秒)

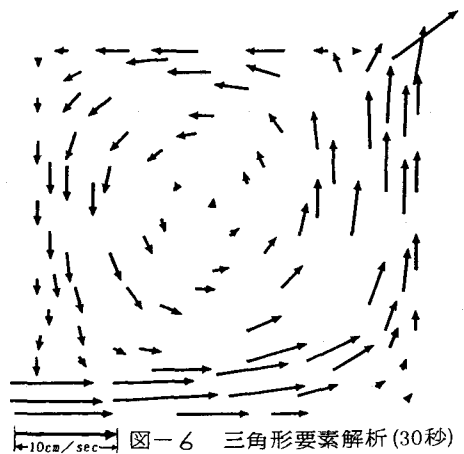


図-6 三角形要素解析(30秒)

参考文献

- 1) 加納正道ら：乱流の有限要素法解析および模型実験、九州産業大学工学部研究報告第20号
- 2) 加納正道ら：拡散水理模型における循環流のFEMによる解析、57年度土木学会西部支部講演概要集
- 3) R.R.Hwang, FEM for Viscous Stratified Flow Over a Semi-Circular Barrier, FE Flow Analysis, Univ. of Tokyo Press, pp. 163-170, (1982).

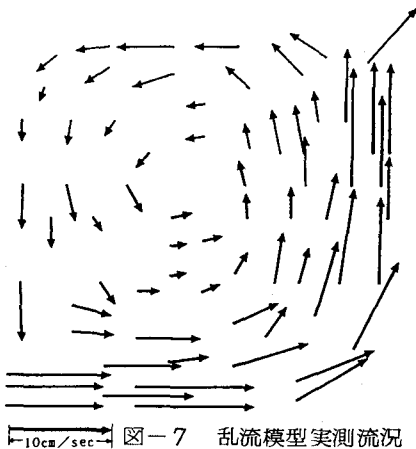


図-7 乱流模型実測流況