

II-63

濁度密度流の移流分散に及ぼす影響 — その1 — 沈降速度が無視できる場合 —

九州大学工学部 正員 東谷陽一
九州工業大学 正員 〇藤崎一裕
長崎大学工学部 正員 古本勝弘

1. まえがき

沈降性粒子の移流分散に及ぼす密度勾配の影響について調べるための第1段階として、沈降速度が0の場合について検討した。流れは開水路2次元とし、流下方向密度勾配が粒子流束に及ぼす影響は摂動法により求めた。また、渦動粘性係数と鉛直方向密度勾配との関連については、Monin-Obukhovの相似理論を用いた。

2. 基礎式

図1のように河床流下方向にx軸、これに垂直上方にz軸をとり、流れはx-z面内の2次元等流とする。x, z方向の運動方程式と流体及び物質の保存則は

$$0 = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

$$d/dx \left(\int_0^h u dz \right) = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_* \frac{\partial C}{\partial z} + WC \right) \quad (4)$$

となる。ここに、 ρ :懸濁液のみかけ密度、 p :圧力、 u :x方向流速、 h :水深、 ε :渦動粘性係数、 ε_* :渦拡散係数で、水面勾配は微小とし、今回は粒子沈降速度 $W=0$ の場合について調べる

濃度 C に関しては、x方向の変化が小さい場合を想定して、x座標方向に展開して1次の項までとり、次式で表す。また、濃度の値も小さく、密度との関係は(6)式で近似される

$$C = C_0 + \frac{dC_m}{dx} x + \frac{dC_m}{dx} h F(z) \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha C) \quad (6)$$

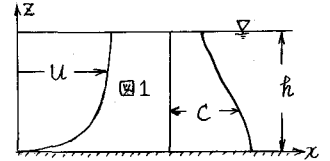
C_m は断面平均濃度である。流下方向濃度勾配 dC_m/dx と係数 α は(zによらない)定数とする。

MoninとObukhovの理論によると、渦動粘性係数 ε と密度勾配との関連は次式で表わされる^{1,2)}

$$\varepsilon = \varepsilon_e (1 - \beta R_f) \quad (7)$$

β :定数、 ε_e : $R_f=0$ のときの ε 、 R_f :フラックス Richardson数

$$R_f = \frac{g/\rho}{-u'w'} \frac{\rho'w'}{\rho \partial u/\partial z} \quad (8)$$



w はz方向流速、

'は時間変動成分を表す。さらに、上式は局所Richardson数 R_i を用いて次式で表わされる

$$\varepsilon = \varepsilon_e (1 - \gamma \beta R_i) \quad (9)$$

$$R_i = \frac{-g(\partial \rho/\partial z)}{\rho (\partial u/\partial z)^2}, \quad \gamma = R_f/R_i \quad (10)$$

渦動粘性係数と流速分布との関係には、混合距離理論を用い、濃度 $C=0$ のときの流速分布に対数則を仮定すると

$$\tau = \rho \varepsilon_e \frac{du}{dz}, \quad \varepsilon_e = l^2 \frac{du}{dz} \quad (11)$$

$$l = \kappa z \sqrt{1-z/h} \quad (12)$$

となる。 τ :剪断応力、 l :混合距離、 κ :カルマンの定数である。

(5)、(6)式を(2)式に代入して p を求め、

これを(1)に代入すると

$$g_i - \frac{\rho'}{\rho_0} g(h-z) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\therefore \rho' = \alpha \rho_0 \frac{dC_m}{dx} \quad (14)$$

となる。また、平均流速 U_m を用いて

$$\hat{u} = u - U_m, \quad x_i = x - U_m t \quad (15)$$

とすると、(13)、(4)式から次式がえられる

$$\hat{u} \frac{dC_m}{dx} = \frac{dC_m}{dx} h \frac{d}{dz} \left(\varepsilon_* \frac{dF}{dz} \right) \quad (16)$$

一方 (9) ~ (12) 式から

$$\varepsilon/u_* h \equiv \bar{\varepsilon} = \kappa \gamma \{ (1-\gamma) - \sigma(1-\gamma)^2 \} (1-\beta R_i) \quad (17)$$

$$\sigma = \frac{\rho' g h^2}{2 \rho U_m^2}, \quad \gamma = z/h \quad (18)$$

となる。 σ は流下方向密度勾配と平均流とのそれぞれが有するエネルギー比に対応する無次元量である。

渦動粘性係数と渦拡散係数を近似的に等しい($\varepsilon \approx \varepsilon_*$)とし、(17)、(18)式を用いると(1)、(16)式から

$$\frac{d\bar{u}}{d\eta} (\bar{\varepsilon} \frac{d\bar{u}}{d\eta}) + 1 = 2\sigma(1-\eta) \quad \text{----- (19)}$$

$$\frac{d}{d\eta} (\bar{\varepsilon} \frac{dF}{d\eta}) = \hat{u} \quad \text{----- (20)}$$

となる。 $\bar{u} = u/u_*$, $\hat{u} = \hat{u}/u_*$, u_* : 摩擦速度であるが、以下簡略化のため無次元表示の「」を省略する。

基礎式の解と σ をパラメータとする摂動法により求める

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \dots \\ F &= F_0 + F_1\sigma + F_2\sigma^2 + \dots \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1\sigma + \varepsilon_2\sigma^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

と置く。上式と (19), (20) 式あるいは (9), (10) 式などから

$$\sigma^0: d/d\eta (\varepsilon_0 du_0/d\eta) + 1 = 0 \quad \text{----- (22)}$$

$$d/d\eta (\varepsilon_0 dF_0/d\eta) = u_0 - u_m \quad \text{----- (23)}$$

$$\varepsilon_0 = \kappa\eta(1-\eta) \quad \text{----- (24)}$$

$$\sigma^1: d/d\eta (\varepsilon_0 du_1/d\eta + \varepsilon_1 du_0/d\eta) = 2(1-\eta) \quad \text{----- (25)}$$

$$d/d\eta (\varepsilon_0 dF_1/d\eta + \varepsilon_1 dF_0/d\eta) = u_1 \quad \text{----- (26)}$$

$$\varepsilon_1 = -\kappa\eta(1-\eta) \{ (1-\eta) - 2\beta F_0'/u_*^2 \} \quad \text{----- (27)}$$

などが導かれる。(22) ~ (27) 式から

$$\varepsilon_1 = -\kappa\eta(1-\eta) \{ (1-\eta) + 2\beta \sum_{n=2}^{\infty} \eta^n (1-\eta)^n / n \} \quad \text{----- (28)}$$

$$u_0 = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta/\eta_0), \quad u_1 = -\frac{2\beta}{\kappa} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\eta^n}{n} \{ (1-\eta)^n (n+1)/(n+1) + 9.862 \cdot (29) \}$$

$$F_0 = \frac{1}{\kappa} \sum_{n=2}^{\infty} (1-\eta)^n / n - 4.004, \quad F_1 = \int_{\eta_0}^{\eta} \{ u_1 d\eta - \varepsilon_1 dF_0/d\eta \} d\eta \quad \text{----- (30)}$$

がえられる。このとき、流下方向の物質流束 q は、

(31) 式、分散係数 D_L は (32) 式で表わされる

$$q = \bar{u} u_m \frac{dC_m}{dx} \int_0^1 \hat{u} F_0 d\eta = \bar{u} u_m \frac{dC_m}{dx} \left[\int_0^1 \hat{u} F_0 d\eta + \right.$$

$$\left. \sigma \left\{ \int_0^1 F_1 u_0 d\eta + \int_0^1 F_0 u_1 d\eta \right\} \right] = \bar{u} u_m \frac{dC_m}{dx} \left[-6.25 - (127+330)\sigma \right] \quad \text{--- (31)}$$

$$D_L / \bar{u} u_m = -q / (dC_m/dx \cdot \bar{u} u_m) = 6.25 + 45.7\sigma \quad \text{----- (32)}$$

3. 計算結果と考察

$\beta = 5^{(3)}$, $\kappa = 0.4$ としたときの計算結果を図2~図6に示す。これらの図から、密度勾配が流況に及ぼす影響を知ることができる。なお (32) 式右辺の1項は $\kappa = 0.4$ とすると 5.86 となり Elder の解と一致する。

図6中にプロットした点は、副30、高さ50長さ600cmの水路による実験結果⁽⁴⁾で密度勾配は塩分により作られ、水路底部のベルトを移動床として動かすことにより流速分布が形成されている。実験の詳細は文献5)に記されている。

図6によると、実線で示した (32) 式は実験値と比較的よく再現しているようである。

なお、(10) 式の R_i は (5), (6) 式を用いて

$$R_i = -2\sigma F_1\eta / u_*^2\eta$$

となり、 R_i も σ の高次を含む形になるが、本報では R_i が非常に小さいことを前提にしているので、 σ の2次以上の項に関する検討は省略した。

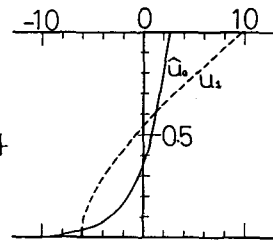
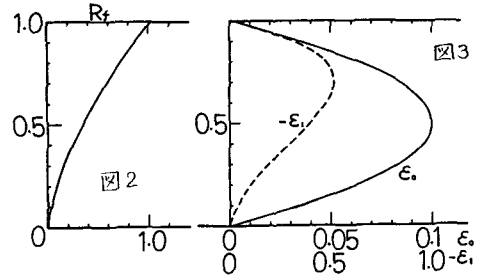


図4

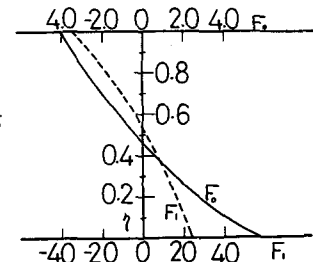


図5

文献

- 1) 谷一郎編: 流体力学の進歩式流況, pp.185~1979
- 2) Turner: Buoyancy Effects in Fluids (Cam. Univ. Press, 1973)
- 3) T. Itakura & T. Kishi: PASCE, Vol. 106 No. HY8, pp.1335-1343, 1979
- 4) Elder, J.W.: J.F.M. Vol. 5, Pt. 4, pp.544-560, 1959
- 5) 栗谷, 古本: 30周年記念講演要集, II-218, pp.452-453, 1975

