

II-8

高精度差分方程式による拡散方程式の数値解析Ⅱ

九州産業大学 正会員 加納正道、赤坂順三

東 和 大学 正会員 〇閑閑幸雄

九州産業大学

大野勝志、八尋祐之

九州産業大学

若嶋清志、矢野利明

1・まえがき 移流分散方程式の解析において従来の差分法、あるいはFEMでは計算精度は十分なものとはいえない。また、我々の高精度差分法による解析では、1次元の厳密解との比較において、前報で述べたように従来の差分法に比べて精度のよい結果がえられた¹⁾。そこで、今回の1次元による非同次型(式(1))の $M \neq 0, N \neq 0$ の高精度差分法による解と厳密解との比較、および1次元ADI法による2次元同次型の高精度差分法の解と厳密解との比較をおこなったので若干の知見を述べる。

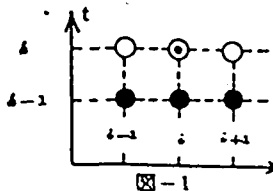
2・高精度差分方程式の基礎式 解析の対象は3次元あるいは平面2次元の場合であるが、今簡単のため1次元で考えると基本式として式(1)をえる。
$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} + MC + N \dots \quad (1)$$

ここに、C:濃度、V:流速、K:拡散係数、

N:非保存項、V: $V = \partial K / \partial x$ 、M: $M = \partial V / \partial x$ 、つぎに、式(1)を x^4 まで含む多項式になおすと式(2)のような無限級数がえられる。

$$\left. \begin{aligned} C^{(0)}(x, t) &= 1 + (M+N)t + \frac{1}{2}M(M+N)t^2 + \frac{1}{6}M^2(M+N)t^3 + \frac{1}{24}M^3(M+N)t^4 + \dots, & C^{(1)}(x, t) &= x + (MX - Vt + N)t \\ &+ \frac{1}{2}M(MX - 2Vt + N)t^2 + \frac{1}{6}M^2(MX - 3Vt + N)t^3 + \frac{1}{24}M^3(MX - 4Vt + N)t^4 + \dots, & C^{(2)}(x, t) &= x^2 + (MX^2 - 2VX + 2K + N)t \\ &+ \frac{1}{2}(M^2X^2 - 4VMX + 2V^2 + 4KM + MN)t^2 + \frac{1}{6}(M^3X^2 - 6VM^2X + 6V^2M + 6KM^2 + M^2N)t^3 + \frac{1}{24}(M^4X^2 - 8VM^3X + 12V^2M^2 + 8KM^3 + M^3N)t^4 \\ &+ \dots, & C^{(3)}(x, t) &= x^3 + (MX^3 - 3VX^2 + 6KX + N)t + \frac{1}{2}(M^2X^3 - 6VMX^2 + 6V^2X + 12KM^2 - 12KV + MN)t^2 + \frac{1}{6}(M^3X^3 - 9VM^2X^2 \\ &+ 18V^2MX + 18KM^2X - 6V^3 - 36KVM + M^3N)t^3 + \frac{1}{24}(M^4X^3 - 12VM^3X^2 + 36V^2M^2X + 24KM^3X - 24V^3M - 72KVM^2 + M^4N)t^4 + \dots, \\ C^{(4)}(x, t) &= x^4 + (MX^4 - 4VX^3 + 12KX^2 + N)t + \frac{1}{2}(M^2X^4 - 8VMX^3 + 12V^2X^2 + 24KM^2X - 48KVX + 24K^2 + MN)t^2 + \frac{1}{6}(M^3X^4 - 12VM^2X^3 \\ &+ 36V^2MX^2 + 36KM^2X^2 - 144KVMX - 24V^3X + 72KV^2 + 72K^2M + M^3N)t^3 + \frac{1}{24}(M^4X^4 - 16VM^3X^3 + 72V^2M^2X^2 + 48KM^3X^2 - 96V^3MX \\ &- 288KVM^2X + 216KV^2M + 144K^2V^2M + 144K^2M^2 + 24V^4 + M^4N)t^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

つぎに、 $\Delta x = \alpha h$ 、 $\Delta t = h^2$ として $(\Delta x)^4$ 程度の精度で高精度差分方程式を求める。基本式(1)の近似解として式(2)の $C^{(0)} \sim C^{(4)}$ を考え、差分式に5個の未定係数をもたせて、図-1に示す6点で差分をとると式(3)をえる。



$$\left. \begin{aligned} C(i, i) &= P_{-1}^{-1} C(i-1, i-1) + P_{-1}^0 C(i-1, i) \\ &+ P_{-1}^1 C(i, i-1) \\ &+ P_{-1}^{-1} C(i+1, i-1) + P_{-1}^0 C(i+1, i) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

●・・・既知点，○・・・未知点，⊙・・・求める点

式(3)の未定係数を求めるには、多項式(2)が式(3)を満足するように作成した連立方程式(4)を解けばよい。

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} A0 & 1 & A0 & A0 & 1 & \\ A1 & (i-1)\alpha h & A2 & A3 & (i+1)\alpha h & \\ B1 & ((i-1)\alpha h)^2 & B2 & B3 & ((i+1)\alpha h)^2 & \\ C1 & ((i-1)\alpha h)^3 & C2 & C3 & ((i+1)\alpha h)^3 & \\ D1 & ((i-1)\alpha h)^4 & D2 & D3 & ((i+1)\alpha h)^4 & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^0 \\ P_{-1}^1 \\ P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ i\alpha h \\ (i\alpha h)^2 \\ (i\alpha h)^3 \\ (i\alpha h)^4 \end{array} \right] \dots \quad (4)$$

但し、A0~D3は文献1)の式(7)に対応する式が必要となる。ここでは紙面の制約で省略する。

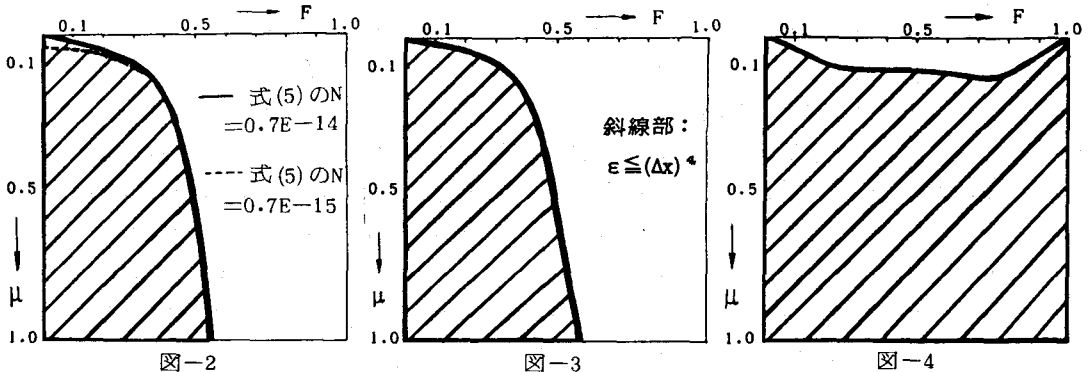
3・厳密解 式(1)の非同次型($M \neq 0, N \neq 0$)の場合に、初期条件 $C(x, 0) = \exp(-x/\sqrt{K})$ 、境界条件 $C(0, t) = \exp\{(1+V/\sqrt{K}+M)t\} + Nt$ 、 $C(\infty, t) = Nt$ を満足する厳密解の一つは、式(5)となり、また、同次型($M=N=0$)で1次元のADI法による2次元の基本式は式(6)で、初期条件 $C(x, y, 0) = \exp\{-x/\sqrt{Kx} + y/\sqrt{Ky}\}$ 、境界条件 $C(0, 0, t) = \exp\{(U/\sqrt{Kx} + V/\sqrt{Ky})t + 2t\}$ 、 $C(\infty, \infty, t) = 0$ を満足する厳密

解の一つは式(7)となる。この厳密解を解くにあたり、基本式(6)において $X=x-Ut, Y=y-Vt, T=t$ とおき $\frac{\partial C}{\partial T} = Kx \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + Ky \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}$ と変形して $C(x,y,t) = F(t) \cdot F(X) \cdot F(Y)$ の如く、それぞれ、 t, X, Y の関数の積と考えて解いたものである。 $C = \text{EXP}(-\frac{x}{\sqrt{K}} + (1 + \frac{V}{\sqrt{K}} + M)t) + Nt \dots (5)$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = Kx \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + Ky \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} - V \frac{\partial C}{\partial y} \quad (6) \quad C = \text{EXP}(-(\frac{x}{\sqrt{Kx}} + \frac{y}{\sqrt{Ky}}) + (\frac{Ut}{\sqrt{Kx}} + \frac{Vt}{\sqrt{Ky}}) + 2t) \quad (7)$$

4・高精度差分解と厳密解との比較 高精度差分方程式を解くにあたり、拡散係数(K)、流速(V)を一定にとり、求めた高精度差分解を厳密解との相対誤差(ε で示す)が $F=0.0025 \sim 1.0, \mu=0.025 \sim 1.0$ の範囲で、1次元同次型、1次元非同次型、2次元同次型の場合において $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ 以下になるかどうかを検討した。また、2次元同次型の高精度差分解を解く場合、初期条件として初期濃度を厳密解と等しく与え、境界条件として、計算領域の四側面に任意の時間($t = \Delta t, \Delta = 1, 2, 3 \dots$)の厳密解を与えた。まず、1次元非同次型の高精度差分解($M=V/10.0, N=0.7E-15$)と式(5)の厳密解との ε が $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ を満足する範囲を図-2(斜線)に示す。これは、1次元同次型の高精度差分解の適用範囲(文献2) 図-3) とほぼ一致する。また、無限級数の式(2)を求めるとき x^4 項で求めたため、ここでは $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ が $\bar{0}[(\Delta t)]^2$ に等しく未定係数 $P_1^0 \sim P_1^0$ を求めるとき t^2 項までの計算でよいことになる。しかし、 t^2 項までの計算では N が大きく時間 t が大きいとき μ が小さい領域で N の項がききすぎて $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ を満足しない。つぎに、 μ 次元のADI法による2次元同次型の高精度差分解($M=N=0$)と式(7)の厳密解との ε が $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ を満足する範囲を図3、図4に示す。ここで、図4は式(2)において t^3 項まで、図2、図3は式(2)において t^2 項までの計算結果である。図2、図3の t^2 項までの計算で得た $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ を満足する適用範囲は、 μ 次元、2次元、同次型、非同次型に関係なくほぼ一致する。また、同じ2次元同次型において図3、図4では $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ の適用範囲が $F=0.3$ を境としてかなり異なる。 t^2 項を含む図3では $F=0.4 (\mu=0.2)$ より $F=0.575 (\mu=1.0)$ へ直線的に低下し、 t^3 項を含む図4では $F=0.5$ を軸に左右対称形をなし適用範囲が広い。これは t^3 項までの計算では F が大きい領域で時間 t が大きいとき式(2)の $V^3 \cdot h^0$ などの項がきいているからだと思われる。

5・むすび 以上の計算結果より、非同次型の拡散方程式の解析および、 μ 次元のADI法による2次元の解析において t^2 項まででは μ 次元同様の精度をえる事ができたし、さらに t^3 項まで求めることにより F, μ のかなり広い範囲で $\bar{0}[(\Delta x)]^4$ の精度をえることができた。今後は、拡散水理模型への適用とともに、2次元の偏微分方程式を2次元の高精度差分方程式で直接解くことを検討していきたい。



参 考 文 献

- 1) 加納、空閑、赤坂：高度近似差分式による拡散方程式の数値解析、昭和57年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集、PP. 198~199
- 2) 加納、空閑、赤坂、西村：移流分散方程式の高度近似差分式解析に関する基礎的研究、土木学会第38回年次学術講演会講演概要集第2部、昭和58年9月、PP. 765~766