

I-38

任意の相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばりの解析

長崎大学大学院 学生員 ○吉田 啓三

長崎大学工学部 正員 岡林 隆敏

1. はじめに 構造物の信頼性解析を行なう場合、不確定な荷重による確率的な応答解析が基礎となる。動的問題では、この解析は不規則振動論により処理することができるが、不規則な分布荷重が載荷するような静的な解析には、まだ効果的手法が確立しているとは言えない。着者は、不規則境界値問題の数値解析の手法を(2)(3)はりに適用し、外力が白色雑音過程の場合と任意の相関を有する不規則分布荷重の場合について報告した。本報告は、任意の相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばりの静的応答解析の手法を研究したものである。数値解析例として、指数関数型と指数余弦関数型の自己相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばりの断面力、および変形応答の変動解析を行なった。

2. はり-荷重系の状態空間表示

図-1のように、分布荷重が作用する連続ばりにおいて、節点1での支点反力 R_1 を状態変数と仮定することにより、 x 点のたわみ $w(x)$ 、たわみ角 $\phi(x)$ 、曲げモーメント $M(x)$ 、せん断力 $Q(x)$ の変化は、状態変数

$$Y(x) = [w(x), \phi(x), M(x), Q(x), R_1]^T \quad (4)$$

を用いて、状態空間で次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} dY(x)/dx &= A_Y(x)Y(x) + F_Y(x) \quad (0 \leq x \leq l) \\ \text{境界条件; } Y(0) &= Y_0, Y(l) = Y_l \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

荷重系モデルの構成 ; 不規則分布荷重 $q(x)$ を、正規性定常確率過程 $r(x)$ とその分散の空間的变化を示す確定関数 $g(x)$ の積で表される非定常確率過程でモデル化する。

$$q(x) = r(x) \cdot g(x) \quad (3)$$

パワースペクトル密度 $S_r(\omega)$ または自己相関関数 $R_r(\lambda)$ が得られた場合、その定常確率過程は、状態ベクトル

$$Z(x) = [Z_1(x), \dots, Z_n(x)]^T \quad (4)$$

で表される荷重系

$$\left. \begin{aligned} dZ(x)/dx &= A_Z Z(x) + B_Z w(x), r(x) = C_Z Z(x) \\ \text{境界条件; } Z(0) &= Z_0, Z(l) = Z_l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の定常解過程で表すことができる。

はり-荷重系の方程式 ; はり-荷重系の状態変数を

$$X(x) = [Y(x), Z(x)]^T \quad (6)$$

で表すと、はり-荷重系の方程式は

$$\left. \begin{aligned} dX(x)/dx &= A_X(x)X(x) + F_X(x) \\ \text{境界条件; } X(0) &= X_0, X(l) = X_l \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

で表すことができる。 $F_X(x)$ は正規性白色雑音ベクトルとなり、その共分散は次式で与えられる。

$$E[F_X(x_1)F_X(x_2)^T] = Q_X(x_1)\delta(x_1 - x_2) \quad (8)$$

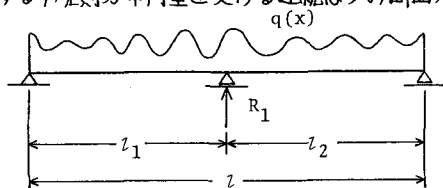


図1 不規則分布荷重が載荷する連続ばり

3. 境界マトリックスと節点マトリックス

はりの左端は、回転支点なので $[\phi, Q_0]^T$ の自由度がある。そこで支点反力 R_1 を考慮した初期ベクトル Y_0 は、 $[\phi_0, Q_0, R_1]^T$ で表される。これを用いると左端境界条件は次式となる。

$$Y_0 = B_Y \cdot \tilde{Y}_0 \quad (9)$$

はり-荷重系に対して、次のような左端境界条件と左端境界マトリックスを定義する。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= B_X \cdot \tilde{X}_0, X_0 = [Y_0, Z_0]^T, \tilde{X}_0 = [\tilde{Y}_0, Z_0]^T \\ B_X &= \begin{bmatrix} B_Y & 0_{51} \\ 0_{15} & I_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

右端も同様に、終端ベクトル Y_l は、 $[w_l, M_l, R_l]^T$ で表される。これを用いると右端境界条件は次式となる。

$$B_Y' Y_l = \tilde{Y}_l = 0 \quad (11)$$

はり-荷重系に関しては

$$\left. \begin{aligned} B_X' X_l &= \tilde{X}_l, X_l = [Y_l, Z_l]^T, \tilde{X}_l = [0_{51}, Z_l]^T \\ B_X' &= \begin{bmatrix} B_Y' & 0_{51} \\ 0_{15} & I_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

次に節点マトリックスについて考える。

$$Y_l^L = P_{Y1} Y_l^R, \quad P_{Y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 P_{Y1} は節点マトリックスである。はり-荷重系の節点マトリックス P_{X1} は、次式で与えられる。

$$P_{x1} = \begin{bmatrix} P_{r1} & O_{s1} \\ O_{1s} & I_{11} \end{bmatrix}$$

4. 不規則応答解析

はり-荷重系 $X(x)$ の共分散 $R_X(x)$ は次のように分割される。

$$R_X(x) = \begin{bmatrix} R_Y(x) & R_{YZ}(x) \\ R_{ZY}(x) & R_Z(x) \end{bmatrix} \quad (15)$$

はりの共分散応答 $R_Y(x)$ は、はり-荷重系の共分散応答 $R_X(x)$ の要素として得られる。はり-荷重系の方程式(7)式の解過程は線形微分方程式の理論より次式で与えられる。

$$X(x) = \Phi_X(x, 0) X_0 + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (16)$$

$$X(x) = \Phi_X(x, l_1) P_{X1} \Phi_X(l_1, 0) X_0 + \Phi_X(x, l_1) P_{X1} \int_0^{l_1} \Phi_X(l_1, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda + \int_{l_1}^x \Phi_X(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (l_1 \leq x \leq l) \quad (17)$$

a) はり-荷重系の共分散方程式

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X(x)^T + \Phi_X(x, 0) E[X_0 F_X(x)^T] + E[F_X(x) X_0^T] \Phi_X(x, 0)^T + Q_X(x) \quad (0 \leq x \leq l_1)$$

$$\text{初期条件; } R_X(0) = R_{X0} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X(x)^T + \Phi_X(x, l_1) P_{X1} \Phi_X(l_1, 0) E[X_0 F_X(x)^T] + E[F_X(x) X_0^T] \Phi_X(x, l_1) P_{X1}^T + Q_X(x) \quad (l_1 \leq x \leq l) \quad (19)$$

$$\text{初期条件; } R_X(l_1) = P_{X1} R_{X0} P_{X1}^T$$

b) 初期条件と外力の相関関数

式(17)において、 $x=l$ としてその式の両辺に右から $F_X(x)^T$ を掛

けた後、両辺に平均操作を施す。その結果に左辺より(12) 得られる。 R_{X0} は $R_{X0} = B_X \tilde{R}_{X0} B_X^T$ より得られる。

式の B_X を掛けると、その要素より次式を得る。

$$B_Y^T \Phi_Y(l, l_1) P_{Y1} \Phi_Y(l_1, 0) B_Y E[\tilde{Y}_0 F_Z(x)^T] + B_Y^T \Phi_Y(l, l_1) P_{Y1} \Phi_Y(l_1, x) Q_Z(x) + B_Y^T \Phi_{YZ}(l, l_1) \Phi_{Z1}(x) Q_Z(x) = O_{31} \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (20)$$

$$B_Y^T \Phi_Y(l, l_1) P_{Y1} \Phi_Y(l_1, 0) B_Y E[\tilde{Y}_0 F_Z(x)^T] + B_Y^T \Phi_{YZ}(l, x) Q_Z(x) = O_{31} \quad (l_1 \leq x \leq l) \quad (21)$$

(20), (21) 式より各区間での $E[\tilde{Y}_0 F_Z(x)^T]$ が求まれば、

$$E[\tilde{X}_0 F_X(x)^T] = \begin{bmatrix} O_{35} & E[\tilde{Y}_0 F_Z(x)^T] \\ O_{15} & O_{11} \end{bmatrix} \quad (22)$$

より、 $E[\tilde{X}_0 F_X(x)^T]$ が求まる。 $E[X_0 F_X(x)^T]$ は

$E[X_0 F_X(x)^T] = B_X \cdot E[\tilde{X}_0 F_X(x)^T]$ より得られる。

c) 初期条件の共分散

$x=l$ における応答の共分散の両辺に B_X^T を掛ける。ここに $B_X(0) = R_X(0) = 0$ のときの(19)式の $x=l$ の解。

$$\begin{bmatrix} O_{33} & O_{31} \\ O_{13} & R_Z \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \tilde{R}_{Y0} & \tilde{R}_{YZ0} \\ \tilde{R}_{ZY0} & \tilde{R}_{Z0} \end{bmatrix} D^T + B_X^T P_X(l) B_X \quad (23)$$

$$D = B_X^T \Phi_X(l, l_1) P_{X1} \Phi_X(l_1, 0) B_X$$

(23)式は $\tilde{R}_{Y0}$ と $\tilde{R}_{Z0}$ の連立方程式となる。これより $\tilde{R}_{X0}$ が

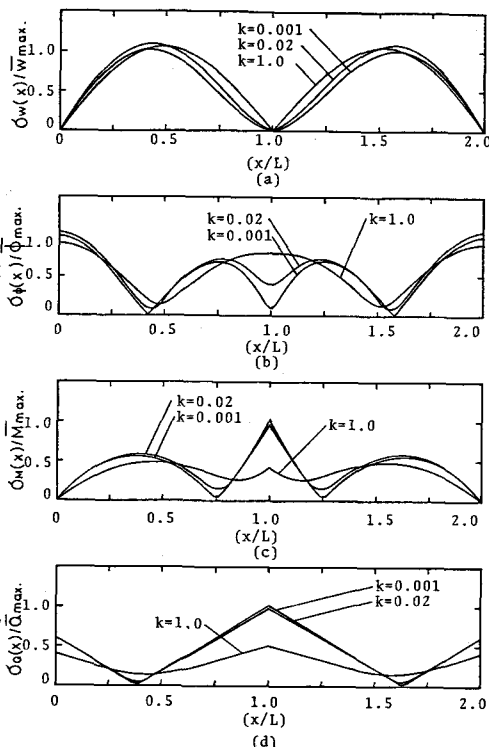


図2 応答の標準偏差

5. 数値解析

荷重のモデルとして、指数関数型と指数余弦関数型と有する確率過程について考えた。	自己相関関数; $R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\Omega \lambda }$ パワースペクトル; $S_r(\omega) = 2\Omega\sigma^2/(\omega^2 + \Omega^2)$ 荷重系の方程式 $dZ(x)/dx = -\Omega Z(x) + \sigma n(x)$ ここで $n(x)$ は指数関数型 $r(x) = \sqrt{2\Omega} Z(x)$ の分散1の白色雑音過程
---	--

型の計算結果を示した。図-2に連続ばりに不規則分布荷重が作用した場合のそれぞれの標準偏差を示した。ここに k は、 $k = \Omega l$ の無次元パラメータであり、分布荷重の強度は、 $\sigma^2 l / \theta = 1$ (θ は等分布荷重の荷重強度) で規定した。 $k \rightarrow 0$ では、等分布荷重による応答の絶対値に漸近し、 $k \rightarrow \infty$ では、白色雑音過程による応答に漸近する。指数余弦関数型の計算結果については、講演会当日発表する。

- [参考文献] (1) 高岡, 他, 土木学会論文報告集, 第334号, 1983年6月
(2) 岡林, 土木学会論文報告集, 第316号, 1981年12月
(3) 岡林, 他, 土木学会論文報告集, 第341号, 1984年1月