

I-37 不規則分布荷重を受ける連続ばりの解法

長崎大学工学部 学生員 ○林田 桂智
長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏
長崎大学大学院 学生員 吉田 啓三

1. はじめに

信頼性理論を適用する設計の観点から、不確定要因を考慮した構造解析に関する研究が進められている。動的な解析は初期値問題になるのに対して、静的な解析は境界値問題になるので、静的な不規則分布荷重を受ける構造物の解析においては、複雑な構造物に適用できる理論が確立していないように思われる。著者らは、不規則境界値問題の解法について研究を進めており、単接ばりの解法については、すでに報告している。しかし、連続ばりを含む多径間ばりの一般的な解法はなされていない。そこで、本報告では、中間支点のある多径間連続ばりについて、外力が白色雑音過程の場合の静的応答解析の手法を提案する。

2. 連続ばりの基礎方程式

(1) 連続ばりの状態空間表示 : 2径間連続ばりに分布荷重 $q(x)$ が作用する場合、 x 点のたわみ $w(x)$ 、たわみ角 $\phi(x)$ 、曲げモーメント $M(x)$ 、せん断力 $Q(x)$ および未知の支点反力 $R_1(x)$ を次式で表す。

$$dw/dx = \phi, \quad d\phi/dx = -M/EI, \quad dM/dx = Q, \quad dQ/dx = -q(x), \quad dR_1/dx = 0 \quad \text{----- (1)}$$

ここで、状態変数 $X(x)^T = [w(x) \ \phi(x) \ M(x) \ Q(x) \ R_1(x)]$ を導入し、外力ベクトルを $F(x)^T = [0 \ 0 \ 0 \ -q(x) \ 0]$ で定義すると、(1)式は次のようにベクトル表示される。なお、図1、図2のような座標軸を用いる。

$$\frac{d}{dx} X(x) = A X(x) + F(x), \quad \text{境界条件 } X(0) = X_0, \quad X(l) = X_1 \quad \text{----- (2)}$$

(2) 節点マトリックスについて : 中間の節点にヒンジや支点がある場合、その点でそれぞれ $M(x)$ 、 $w(x)$ が0になり、新しい未知変数 $\delta\theta_1$ (ヒンジ点の折れ角)、 R_1 (支点反力) が表れる。そこで1径間目の右端の状態ベクトルの $M_{l_1}^R$ 、 $w_{l_1}^R$ を0にし、新しい未知量をそれと同じ性質をもつ要素に加えて、2径間目の左端の状態ベクトルとしなければならぬ。図-1 不規則分布荷重を受ける連続ばり

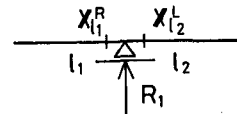
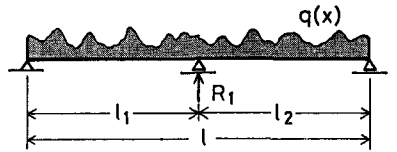


図-2 中間支点の状態変数

ない。図-3 (a)は中間節点が支点の場合であり、(b)はヒンジの場合である。これを節点マトリックスと称する。節点マトリックス P_1 を用いると、2径間目ごとの初期条件は次のようになる。

$$X_{l_2}^L = P_1 X_{l_1}^R \quad \text{----- (3)}$$

(3) 境界条件の処理 : 左端、右端の境界条件を X_0 および X_1 でベクトル表示した場合、左端支点の回転、固定、自由端に対して、それぞれ $[\phi_0]$ 、 $[M_0 \ Q_0]$ 、 $[w_0 \ \phi_0]$ の自由度がある。これを初期ベクトル X_0 で定義すると、境界マトリックス B を用いて、左端境界条件は、次式で表される。

$$X_0 = B X_0 \quad \text{----- (4)}$$

他方、右端では、拘束、固定、自由端に対して、それぞれ $[w_l \ M_l]$ 、 $[w_l \ \phi_l]$ 、 $[M_l \ Q_l]$ は0となる。これを終端ベクトル X_1 と定義すると右端の境界マトリックス B を用いて、右端境界条件は、次式で表される。

$$B X_1 = X_1 = 0 \quad \text{----- (5)}$$

3. 不規則応答解析

(1) 共分散方程式の誘導 : 不規則分布荷重 $q(x)$ を白色雑音過程でモデル化すると、外力ベクトル $F(x)$ の確率特性は(6)式で表される。応答は、一般性を失うことなく、平均値応答と平均値回りの応答に分離することがで

$$\begin{matrix} \text{(a)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(b)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

図-3 節点マトリックス

さる。以後平均値回りの応答について説明する。(2)式の解を考えると、線形微分方程式の理論より、1径間目、

$$(i) E[F(x)] = 0, (ii) E[F(x)F(x_2)^T] = Q(x)\delta(x_1 - x_2) \quad \text{----- (6)} \quad \text{2径間目の解は(7)式,}$$

$$X(x) = \Phi(x, x_1)X_0 + \int_{x_1}^x \Phi(x, \lambda)F(\lambda) d\lambda \quad \text{----- (7)} \quad \text{(8)式で与えられる。}$$

$$X(x) = \Phi(x, l_1)P_1\Phi(l_1, 0)X_0 + \Phi(x, l_1)P_1 \int_0^{l_1} \Phi(l_1, \lambda)F(\lambda) d\lambda + \int_{l_1}^x \Phi(x, \lambda)F(\lambda) d\lambda \quad \text{----- (8)}$$

ただし、 $\Phi(x_2, x_1)$ は、 $\frac{1}{L} \Phi(x, x_1) = A \Phi(x, x_1)$, $\Phi(x_2, x_1) = I$ の解より定義される状態遷移行列である。

応答の共分散は、 $R(x) = E[X(x)X(x)^T]$ で定義される。 $X(x)$ の共分散応答は次式の解として与えられる。

(i) ($0 \leq x < l_1$) の場合、初期条件 $R_x(0) = R_{x0}$

$$\frac{d}{dx} R_x(x) = A R_x(x) + R_x(x)A^T + \Phi_x(x, 0)E[X_0 F(x)^T]\Phi(x, 0)^T + Q(x) \quad \text{----- (9)}$$

(ii) ($l_1 \leq x < l$) の場合、初期条件 $R_x(l_1) = R_{xl_1} = P_1 R_{x0} P_1^T$

$$\frac{d}{dx} R_x(x) = A R_x(x) + R_x(x)A^T + \Phi(x, l_1)E[X_{l_1}^T F(x)^T] + E[F(x)(X_{l_1}^T)]\Phi(x, l_1)^T + Q(x) \quad \text{----- (10)}$$

(2) 初期条件と外力の相関関数： $E[X_0 F(x)^T]$, $E[X_{l_1}^T F(x)^T]$

(7)式において $x = l_1$ とし、 $x = l$ とした(8)式の両辺に $F(x)^T$ を掛けした後、両辺に平均操作を施す。さらに両辺に右端の境界マトリックスを掛ければ、右端境界条件より、1径間目では次式が得られる。

$$B^T \Phi(l, l_1) P_1 \Phi(l_1, 0) B E[X_0 F(x)^T] + B^T \Phi(l, l_1) P_1 \Phi(l_1, x) Q(x) = 0 \quad \text{----- (11)}$$

これより $E[X_0 F(x)^T]$ を得る。また(3)式と(7)式より次式を得る。

$$E[X_{l_1}^T F(x)^T] = P_1 \Phi(l_1, 0) E[X_0 F(x)^T]$$

さらに、 $E[F(x)X_{l_1}^T]^T = E[X_{l_1}^T F(x)^T]^T$ の関係がある。

(3) 初期条件の共分散 R_0 ：まず $R_{x0}(0) = 0$ の条件で(9)式より得られる解で $x = l_1$ としたものを $P(l_1)$ とする。

この条件のもとで(10)式の共分散方程式を解くと、初期条件0の解を得ることが出来る。得られた解で $x = l$ のものを荷重項 $P(l)$ と称し、次式が得られる。

$$R_x(l) = \Phi(l, l_1) P_1 \Phi(l_1, 0) R_{x0} \Phi(l_1, 0)^T P_1^T \Phi(l, l_1)^T + P(l) \quad \text{----- (12)}$$

(12)式の両辺に B^T と B^T を掛けると、 $B^T R_x(l) B^T$ の関係より次式を得る。

$$B^T \Phi(l, l_1) P_1 \Phi(l_1, 0) B^T R_{x0} B^T \Phi(l_1, 0)^T P_1^T \Phi(l, l_1)^T B^T + B^T P(l) B^T = 0 \quad \text{----- (13)}$$

(13)式より $\tilde{R}_0$ が得られる。ここに $\tilde{R}_0$ はそれぞれの境界条件に対する左辺の0でない境界条件を表している。

4. 数値解析と考察

図-4 は、たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の標準偏差応答を、等分布荷重によるそれぞれの最大値 $\bar{w}_{max}$, $\bar{\phi}_{max}$, $\bar{M}_{max}$, および $\bar{Q}_{max}$ で基準化した値で示したものである。

図-4 (a), (c) は、たわみ変動と曲げモーメントの変動を図示したものである。それぞれの場合、変動は各スパン中央付近で最大となる。図-4 (b), (d) は、たわみ角の変動とせん断力の変動を図示したものである。(b)の場合、変動は左端と右端で最大となり、各スパンの中央付近で最小となる。(d)の場合、変動は中間支点で最大となり、各スパンの中央付近で最小となる。

さらに、多径間ばりについては講演時に発表する予定である。

[参考文献] (1) 高岡 白木 敬保：土木学会論文報告集第334号・1983年6月 (2) 岡林：土木学会論文報告集第316号・1981年12月 (3) 岡林、蒲川、吉田：土木学会論文報告集第341号・

1984年1月 (4) 成田、遠田：伝達マトリックス法、培風館、1970年

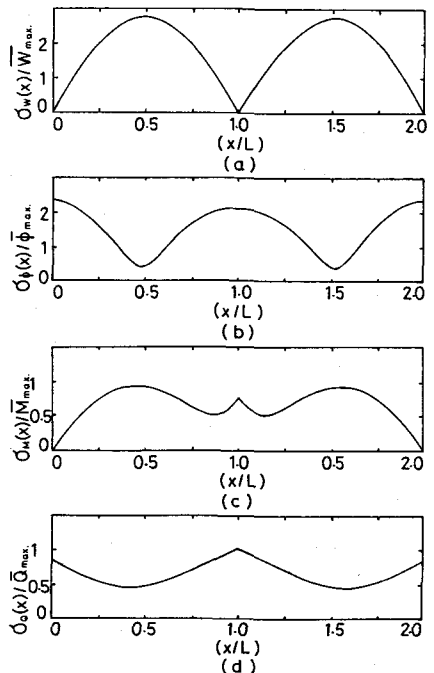


図-4 応答の標準偏差