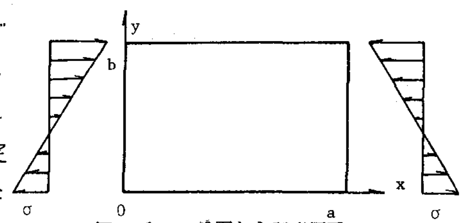
I-36　面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性(続報)

長崎大学工学部　学生員　○松川　徹
長崎大学工学部　正　員　　高橋　和雄
長崎大学工学部　学生員　　田畑　徳明

1.まえがき　面内曲げモーメントによる応力が作用する荷重辺単純,他辺固定の長方形板の定式化と不安定領域の性質については先に報告[1]した。しかし実橋の腹板にはさらに軸力が作用し,また動的安定性を検討する場合その解析モデルである長方形板の境界条件は確定し難い。そのために本研究は長方形板の動的安定性におよぼす応力勾配の影響,および先の報告[1]では取り扱わなかった荷重辺固定の長方形板の動的安定性について検討するものである。

2.解法　解析モデルとしては図-1で示すような,荷重辺長がb,非荷重辺長aの長方形板を考え,これに任意の応力勾配をもつ静的面内力N_{x0}と動的面内力N_{xt}が作用するものとする。また境界条件としては次の2 caseを想定した。すなわち,荷重辺固定,他辺単純支持(caseⅢ),周辺固定(caseⅣ)の場合である。次に,長方形板の面外振動方程式は次のように与えられる。



図－1　一般図および座標系

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\nabla^4 w+(N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに,w:たわみ,ρ:板の密度,h:板厚,t:時間,$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$:板剛度,E:ヤング率,ν:ポアソン比,$N_{x0}=\sigma_0 h\,(1-c\frac{y}{b})$:静的面内力,$N_{xt}=\sigma_t h\,(1-c\frac{y}{b})$:動的面内力,$c$:応力勾配(ただし,$c=2$の場合:純曲げ,$c=0$の場合:一様圧縮,$c=1$場合:3角形分布圧縮),$\Omega$:加振振動数

式(1)の解を次のように仮定する。

$$w=h\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{mn}(t)\,W_{mn}(x,y) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに,T_{mn}:未知の時間関数,W_{mn}は各境界条件のもとでの固有振動形[2]である。

$$\text{case Ⅲ}\quad W_{mn}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^{mn}\left\{\cos\frac{(i-1)}{a}\pi x-\cos\frac{(i+1)}{a}\pi x\right\}\sin\frac{j\pi}{b}y \qquad (3\cdot a)$$

$$\text{case Ⅳ}\quad W_{mn}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^{mn}\left\{\cos\frac{(i-1)}{a}\pi x-\cos\frac{(i+1)}{a}\pi x\right\}\left\{\cos\frac{(j-1)}{b}\pi y-\cos\frac{(j+1)}{b}\pi y\right\} \qquad (3\cdot b)$$

式(2)を式(1)に代入しGalerkin法を適用すれば次のような運動方程式が得られる。

$$\omega^2[A]\{T\}+[B]\{T\}+(\bar{N}_{x0}[C]+\bar{N}_{xt}[D]\cos\tau)\{T\}=\{0\} \qquad (4)$$

ここに,$\omega=\Omega/\omega_1$:振動数比,ω_1:長方形板の最低固有振動数,$\bar{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$,$\bar{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$ N_{cr}:長方形板の座屈面内力,$\{T\}=\{T_{11}\,T_{12}\cdots\ T_{21}\,T_{22}\cdots\}^T$

式(4)の解を次のように仮定する。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\left\{\frac{1}{2}\mathbb{b}_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\mathbb{a}_m\sin m\tau+\mathbb{b}_m\cos m\tau)\right\} \qquad (5)$$

ここに,λ:未定定数,$\mathbb{b}_0$,$\mathbb{a}_m$,$\mathbb{b}_m$:未知ベクトル,式(5)を式(4)に代入すれば次のような2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{0} & \mathbb{I}\\ \mathbb{M}_2^{-1}\mathbb{M}_1 & -\mathbb{M}_2^{-1}\mathbb{M}_0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbb{X}\\ \mathbb{Y}\end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix}\mathbb{X}\\ \mathbb{Y}\end{Bmatrix} \qquad (6)$$

ここに,$\mathbb{M}_0$,$\mathbb{M}_1$,$\mathbb{M}_2$:λの0,1,2次の係数行列,$\mathbb{Y}=\lambda\mathbb{X}$,$\mathbb{X}=\{\mathbb{b}_0,\mathbb{b}_1,\mathbb{b}_2\cdots\ \mathbb{a}_1\,\mathbb{a}_2\cdots\}^T$

式(6)の固有値を明らかにすることによって,解の安定性が直接明らかにされる。

3.応力勾配の影響　応力勾配の影響を調べるため,N_{x0}が作用しない正方形板に,変動曲げ応力のみが作用した場合($\because N_{xt}=6\frac{M_t}{b^2}(1-2\frac{y}{b})$)と,さらに軸力が加わりその応力分布が3角形となった場合($\because N_{xt}=q_t(1-\frac{y}{b})$)について動的安定性を検討した。ただし境界条件は荷重辺単純支持,他辺固定とする。また表-1は係数行列[D]の構成要素をそれぞれの場合について示したものである。

表-1 [D]の要素構成

純曲げ	三角形分布応力
$[D]=\begin{bmatrix} 0 & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & \cdots \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 & d_{25} & \cdots \\ 0 & d_{32} & 0 & d_{34} & 0 & \cdots \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 & d_{45} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$	$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & \cdots \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & \cdots \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} & 0 & \cdots \\ d_{41} & 0 & d_{43} & d_{44} & d_{45} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

表-1から分るように曲げによる応力が作用した場合は$d_{ii}=0$となり結合共振が支配的になるのに対して3角形分布応力が作用すると$d_{ii}\neq 0$となり，この項を介して単純共振が生じる。事実，図-2で示した正方形板の不安定領域は単純共振の主不安定領域が結合共振の不安定領域よりも広くなっている。このように応力勾配は不安定領域に大きな影響を与える。

4.境界条件の影響　境界条件の影響を検討するため，静的曲げを受けない正方形板に変動曲げのみを作用させ，caseⅢ，caseⅣ の各境界条件下でその不安定領域を求め，図-3，4に示した。図の横軸は加振振動数比ωであり，縦軸は変動曲げモーメントMtを座屈曲げモーメントMcrで無次元化した値$\bar{M}_t$である。(ここでは，$N_{xt}=\frac{6M_t}{b^2}(1-2\frac{y}{b})$)

図より明らかなように両者とも前回の報告[1]と同様に結合共振が支配的であり，特に固有振動数が接近している場合の不安定領域は広い。

caseⅠ，caseⅡではx方向の波数が異なる場合，結合共振はなかったが，caseⅢ，Ⅳではこのことはかならずしも成り立たず，caseⅢではx方向の波数の和が偶数で，かつy方向の波数の和が奇数の場合に，結合共振は存在する。また，caseⅣにおいてはx方向の波数の和が偶数で，かつ y方向の波数の和が奇数の場合，あるいは，x方向の波数の和が奇数で，かつ，y方向の波数の和が偶数である場合，結合共振が存在する。

5.まとめ　本研究によって，変動曲げを受ける長方形板の動的安定性は，応力勾配，および境界条件の影響を大きく受けることが分った。その結果より，実橋における動的安定性を検討する場合に，そのモデル化が重要となることが，予想される。

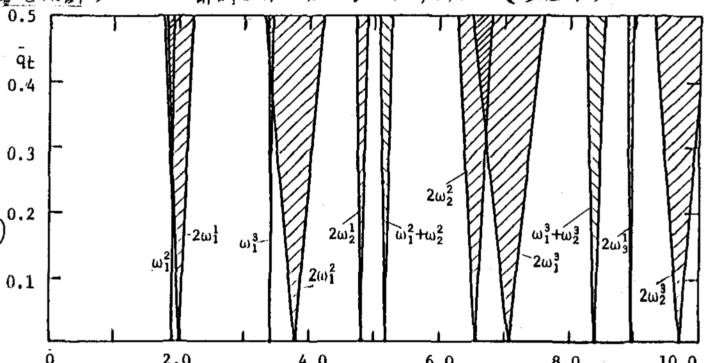


図 -2　3角形分布力による正方形板の不安定領域　ω (caseⅡ)

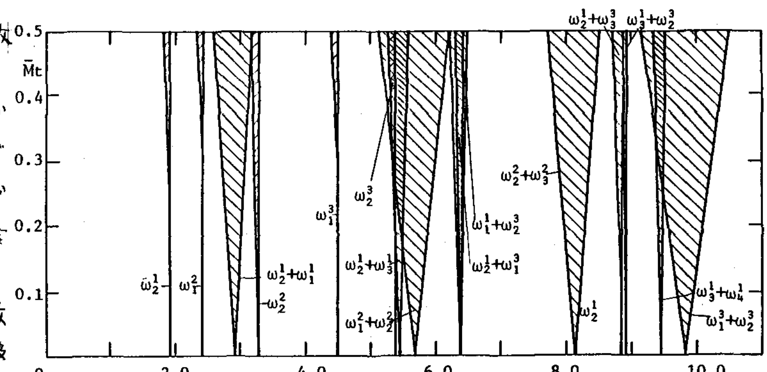


図 -3　純曲げによる正方形板の不安定領域 (caseⅢ，$\bar{M}_o$=0.0)

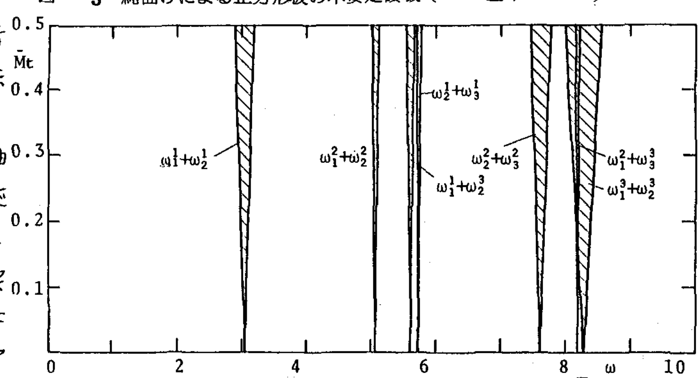


図 -4　純曲げによる正方形板の不安定領域 (caseⅣ，$\bar{M}_o$=0.0)

参考文献　1) 高橋・田川・池田・松川・土木学会論文報告集　第341号，1984，1
2) 井上・高橋・昭和58年度　西部支部講演論文集　Ⅰ-27　1984，2