

I-35

幾何学的非線形性を考慮した面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○池田虎彦
長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 長方形板に面内変動曲げが作用すると、面外振動の不安定領域では結合共振が支配的であることが報告されている¹⁾。この不安定振動は線形理論による解析では発散する結果が得られている。平板構造では振幅が板厚程度になると板の中央面に生じる面内力によって、振幅は有限になることが知られている。そこで本論は幾何学的非線形性を考慮した基礎方程式を用いて、面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性を解析したものである。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示すように、腹板を鉛直補剛材で区切られた1枚の長方形板と考える。この長方形板に曲げモーメントMが作用し、板に作用するたて方向の慣性力および回転慣性の影響を無視すると、板の非線形振動の基礎方程式は次の式になる。²⁾

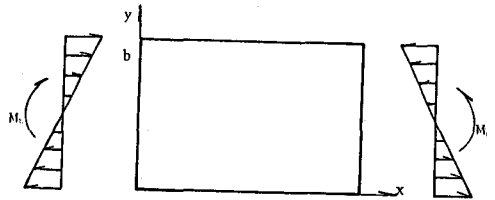


図-1 一般図および座標系

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (1)$$

$$L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - h \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{6}{h^2} (1 - 2 \frac{\nu}{2}) (M_0 + M_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

ここで x, y : 直交座標系 h : 板厚, ρ : 板の密度, $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$: 板剛度, E : ヤング率, ν : ポアソン比, $w(x, y, t)$: 面外方向変位, F は Air_y の応力関数で次のように定義される。 $h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = N_x$, $h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = N_y$

$-h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = N_{xy}$, N_x, N_y, N_{xy} は中央面に生じる力。 x, y 方向の変位を u, v とすると w, F の間に次の関係がある。
 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$, $\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

境界条件として全単純支持の場合を考える。 $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ($x=0, a$), $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ($y=0, b$) - (3)

境界での面内変位の条件は, $\int_0^a v dx = 0$ ($y=0, b$), $\int_0^b u dy = 0$ ($x=0, a$) $u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx$, $v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy$ (4)

3. 解析法 面外変位 w は境界条件(3)を満足するように仮定すると,

$$w(x, y, t) = h \sum_{m,n} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y), \quad W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

T_{mn} : 未知の時間関数, W_{mn} : 座標関数, (5) 式を適合条件式(1)に代入して(4)式を満足するように応力関数を決める。

$$\text{特解 } F_0 = \frac{E h^2}{32} \sum_{m,n} T_{mn}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\nu \pi^2}{b^2} \right) - \frac{E h^2 \pi^2}{4 a^2 b^2} \sum_{m,n} T_{mn} T_{ms} \left\{ \frac{S \pi^2}{(\pi+S)\pi} \cos \alpha y + \frac{S \pi^2}{(\pi-S)\pi} \cos \beta y + \frac{\pi S - S^2}{\pi^2 + 2\pi^2 \alpha^2 + \alpha^4} \cos \alpha x \cos \alpha y \right. \\ \left. + \frac{\pi S - S^2}{\pi^2 + 2\pi^2 \beta^2 + \beta^4} \cos \beta x \cos \beta y \right\} \quad (6) \text{ また与解 } F_c = A(t) x^2 + B(t) y^2 \quad (7) \text{ で表わす。}^{3)}$$

一般解は $F = F_0 + F_c$ で表わされる。これを(4)式に代入して $A(t), B(t)$ を決定する。

$$A(t) = \frac{\pi^2}{1-\nu^2} \left\{ \frac{E h^2}{16} \sum_{m,n} T_{mn}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\nu \pi^2}{b^2} \right) \right\} \quad B(t) = \frac{\pi^2}{1-\nu^2} \left\{ \frac{E h^2}{16} \sum_{m,n} T_{mn}^2 \left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{\nu M^2}{b^2} \right) \right\} \quad \text{ここで } \gamma = \frac{2 M \pi}{a}, \\ \alpha = \frac{\gamma + S}{2} \pi, \beta = \frac{\gamma - S}{2} \pi, \text{ この応力関数 } F \text{ と面外変位 } w \text{ を(2)式に代入して, Galerkin 法を適用する。}$$

$$\int_0^a \int_0^b L(w, F) W_{mp}(x, y) dx dy = 0 \quad \text{ここに } m=1, 2, \dots, p=1, 2, \dots \text{ と可なり} \frac{P A A^2}{D \pi^4} \ddot{T}_{mp} + (M^2 + \frac{P^2}{h^2}) T_{mp} + \frac{12 M^2 A^2}{\pi^2 D^2 h^2} (M_0 + M_1 \cos \Omega t) \sum_{r,s} T_{mr} I_{pr} - 3(1-\nu^2) M^2 \sum_{r,s} T_{mn} T_{ms} I_{prns} + \frac{3}{2} (1-\nu^2) \sum_{r,s} T_{mn}^2 T_{mp} \left\{ \frac{\pi^2 P^2}{2 \pi^2 h^2} + \frac{M^2}{1-\nu^2} \left(M^2 + \frac{\nu M^2}{h^2} \right) + \frac{P^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2} + \frac{\nu M^2}{\pi^2} \right) \right\} - 12(1-\nu^2) M^2 \sum_{r,s} T_{mn} T_{ms} T_{mr} (I_{prns}^1 - r^2 I_{prns}^2 - r I_{prns}^3) = 0 \quad (8) \quad \text{ここに } \mu = \frac{a}{b} \text{ : 辺長比}$$

$$I_{pr} = \int_0^1 (1-2\eta) \sin r\pi\eta \sin p\pi\eta d\eta, \quad I_{prns} = \int_0^1 \cos 2n\pi\eta \sin r\pi\eta \sin p\pi\eta d\eta,$$

$$I_{prns} = \int_0^1 \left\{ \frac{S}{2(\pi+S)} \cos(\pi+S)\pi\eta + \frac{S}{2(\pi-S)} \cos(\pi-S)\pi\eta - \frac{1}{4} U(\pi+S)^2 \cos(\pi+S)\pi\eta - \frac{1}{4} V(\pi-S)^2 \cos(\pi-S)\pi\eta \right\} \sin \pi\eta \sin p\pi\eta d\eta, \\ I_{prns}^2 = \int_0^1 \left\{ U \cos(\pi+S)\pi\eta + V \cos(\pi-S)\pi\eta \right\} \sin \pi\eta \sin p\pi\eta d\eta, \\ I_{prns}^3 = \int_0^1 \left\{ U(\pi+S) \sin(\pi+S)\pi\eta + V(\pi-S) \sin(\pi-S)\pi\eta \right\} \cos \pi\eta \sin p\pi\eta d\eta,$$

ここで、 $U = (\pi S - S^2) / \{ 16M^4\mu^4 + 8M^2(\pi+S)^2\mu^2 + (\pi+S)^4 \}$, $V = (\pi S + S^2) / \{ 16M^4\mu^4 + 8M^2(\pi-S)^2\mu^2 + (\pi-S)^4 \}$
 $\eta = y/l$, (8)式を無次元化する。

$$\frac{P\mu^2\alpha^2}{D\pi^2} \omega_1^2 \omega_2^2 \ddot{T}_{11} + (M^2 + \frac{P^2}{\mu^2}) \ddot{T}_{11} + 2\lambda_{cr}(\bar{M}_0 + \bar{M}_0 \cos \tau) \sum_{r=1}^{\infty} T_{1r} I_{pr} - 3(1-\nu^2) M^4 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} T_{1r} T_{1s} I_{pr} + \frac{3}{2}(1-\nu^2) \sum_{r=1}^{\infty} T_{1r}^2 \\ T_{11} \left\{ \frac{\pi^2 P^2}{2\mu^4} + \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{\nu \pi^2}{\mu^2} \left(\frac{P^2}{\mu^2} + \frac{\nu M^2}{\mu^2} \right) \right\} - 12(1-\nu^2) M^4 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} T_{1r} T_{1s} T_{1r} (I_{prns}^1 - \nu^2 I_{prns}^2 - \nu I_{prns}^3) \quad (9)$$

ここに $\bar{M}_0 = M_0/M_{cr}$: 無次元静曲げモーメント, $\bar{M}_0 = M_0/M_{cr}$: 無次元変動曲げモーメント, M_{cr} : 座屈曲げモーメント,
 $\lambda_{cr} = \frac{6M_{cr}\alpha^2}{\pi^2 D}$: 座屈固有値, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0/\omega_1$: 無次元加振振動数, $\omega_1 = \alpha \sqrt{\frac{\pi^2 D}{12I}}$: 長方形板のx方向の波数1の場合の
 最低次固有振動数, α : 1次の振動の固有値, $\tau = \omega_1 t$: 無次元時間

4. 解析結果 (9)式を成分に分けて表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{T}_{11} + b_{11} \ddot{T}_{11} + c_{12} \ddot{T}_{12} \cos \tau + (d_{11} + e_{11}) \ddot{T}_{11} + d_{22} \ddot{T}_{12} + (d_{12} + e_{12} + f_{122} + f_{222}) T_{11} T_{12} + (d_{21} + f_{112} + f_{121}) T_{11}^2 T_{12} = 0 \\ a_{22} \ddot{T}_{12} + b_{22} \ddot{T}_{12} + c_{21} \ddot{T}_{11} \cos \tau + d_{21} \ddot{T}_{11} + (d_{22} + e_{22}) \ddot{T}_{12} + (d_{21} + f_{221} + f_{222}) T_{11} T_{12} + (d_{21} + e_{21} + f_{212} + f_{221}) T_{11}^2 T_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $a_{pp} = 1$, $b_{pp} = \{ (M^2 + \frac{P^2}{\mu^2}) + 2\lambda_{cr} M^2 \bar{M}_0 I_{pr} \} / \alpha^2 \bar{\omega}^2$, $c_{pr} = \{ 2\lambda_{cr} M^2 (\bar{M}_0 + \bar{M}_0) I_{pr} \} / \alpha^2 \bar{\omega}^2$, $d_{prns} = \{ -3M^4 (1-\nu^2) I_{prns}^1 \} / \alpha^2 \bar{\omega}^2$, $e_{prns} = \{ \frac{3}{2}(1-\nu^2) \{ \frac{\pi^2 P^2}{2\mu^4} + \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{\nu \pi^2}{\mu^2} (\frac{P^2}{\mu^2} + \frac{\nu M^2}{\mu^2}) \} / \alpha^2 \bar{\omega}^2$, $f_{prns} = \{ -12(1-\nu^2) M^4 (I_{prns}^1 - \nu^2 I_{prns}^2 - \nu I_{prns}^3) \} / \alpha^2 \bar{\omega}^2$, $p=1,2,\dots$, $r=1,2,\dots$, $s=1,2,\dots$, $\pi+S$

(10)式において第3項までが線形項で、第4項から7項が非線形項である。そこで、結合共振の不安定領域での
 時間応答をみる。(10)式を Runge-Kutta-Gill法を用いて直接解いて、不安定領域での時間応答を求める。このときの
 初期条件は、 $T_{11} = T_{12} = 0.01$, $\dot{T}_{11} = \dot{T}_{12} = 0.00$ である。無次元加振振動数は $\bar{\omega} = 3.5$, 結合共振は $\omega_1 + \omega_2$ (ω_1^2 : x方向半
 波数M, y方向半波数Sの振動形をもつ固有
 振動数), 無次元曲げモーメントは $\bar{M}_0 = 0.4$, 辺長
 比 $\mu = 1.0$, $\bar{M}_0 = 0.0$ を使用した。その結果, 図-
 2は線形の場合であり振動は発散している。図-
 3は非線形項が利いた場合であり振動は発散せ
 ずに一定値におちついている。

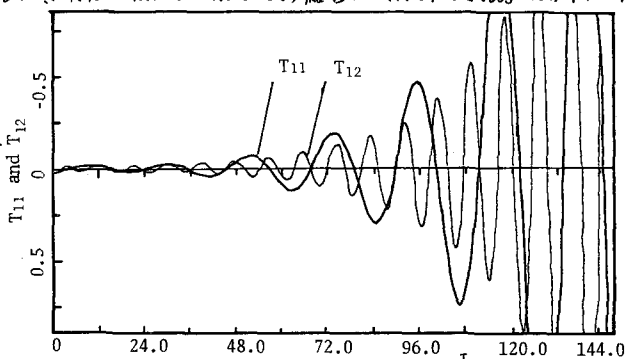


図-2 線形振動

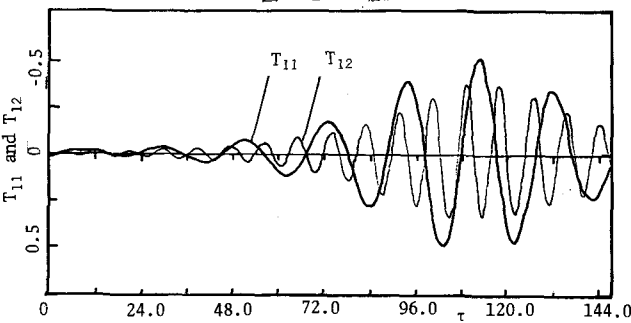


図-3 非線形振動

5. まとめ 非線形振動理論による解析では不安
 定振動の振幅は安定になることが確かめられた。
 本解析法を用いて、今後、面内変動曲げによる
 長方形板の振幅を各種のパラメータのもとに
 解析する予定である。実在の長方形板では初期
 たわみが面外変形に大きな影響を及ぼすので、
 初期たわみを考慮した解析に拡張することが必
 要である。これは逐次発表の予定である。
 参考文献 1) 高橋, 田川, 池田, 松川: 土木学
 会論文報告集, 第341号, 1984/1

2) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory
 of Plates and Shells, 2nd. Edition 1959

3) 金沢半谷: 第25回応用力学連合講演会論文抄録集, B-13, 1975.10